# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. 1. August 1918. Redaktionsschluß für No. 17 am 26. Juli 1918. 19. Jahrgang.


INHALT:


**Originalmitteilungen:**

E. Budde, Über die Bildung von Kombinationstönen und Obertönen. S. 321.

A. Korn, Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes. IX. S. 327.

A. Haas, Über eine Beziehung der Gravitationskonstante zu den Grundgrößen der Elektrizitätstheorie. S. 330.

**Zusammenfassende Bearbeitungen:**

W. Voigt, Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen. Spezieller Teil I. S. 331.

**Besprechungen:**

H. Usner, Der Kreisel als Richtungsweiser, seine Entwickelung, Theorie und Eigenschaften. S. 343.

**Personalien.** S. 344.

**Angebote.** S. 344.


## ORIGINALMITTEILUNGEN.

### Über die Bildung von Kombinationstönen und Obertönen.


Von E. Budde.


In meinem Referat über die Resonanztheorie des Hörens[1]) ist eine Abhandlung von F. Küstner „Untersuchungen über den Schalldruck"[2]) nicht berücksichtigt, in welcher der von Waetzmann vermutete Zusammenhang zwischen Schalldruck und Bildung von Kombinationstönen auf korrekter Grundlage erörtert wird. Wenn auch die Durchführung der Küstnerschen Theorie im folgenden nur mit einem Grade der Annäherung geleistet wird, der kaum über qualitative Ergebnisse hinausführt, so ist ein kritischer Vergleich derselben mit den übrigen Theorien doch geeignet, gewisse Grundfragen, die der Experimentator zunächst beantworten muß, schon jetzt deutlich hervortreten zu lassen. Ich bitte daher, das Folgende als Nachtrag zu meinem Referat anzunehmen.

#### § 1. Vorbemerkungen.

a) Will man die verwickelteren Resonanzerscheinungen im menschlichen Ohr beurteilen lernen, so wird man zunächst objektive Beobachtungen an Apparaten außerhalb des Ohres anstellen müssen. Dabei sind natürlich zunächst möglichst einfache Verhältnisse zu wählen, insbesondere wird man Resonatoren zu untersuchen haben, deren Abweichung von der Symmetrie entweder verschwindet oder meßbar und reproduzierbar ist; die Waetzmannschen Töne im Mikrophon-Telephonkreis kommen erst in zweiter Linie in Betracht, weil die durch das Mikrophon hervorgerufene Asymmetrie diese letztere Eigenschaft nicht hat.

b) Benutzt man ausgedehnte Objekte (z. B. Platten oder Saiten) als Resonatoren, so wird man in der Regel nur ihre Grundtöne oder bestimmt ausgewählte Obertöne beobachten. Die verwickeltere Form, in der die Schwingungsgleichungen derartiger Objekte auftreten, ist darin begründet, daß die Theorie die Möglichkeit bieten muß, die Verteilung der Amplituden über die einzelnen Elemente des Objekts anzugeben. Da aber alle diese Elemente im gegebenen Fall nach derselben periodischen Zeitfunktion schwingen, kommt für die Resonanz eben nur die Periode dieser Schwingung in Betracht, und da genügt es für die Darstellung, wenn man das Objekt durch einen Punkt von einer Koordinate ersetzt, dem man eine mittlere Masse, eine mittlere Elastizitätskonstante und mittlere Reibungseffekte zuschreibt.

c) Es ist zu bemerken, daß, auch wenn man das tut, der Begriff der Resonanz nicht ganz eindeutig ist. Dies möge an dem Beispiel eines Massenpunktes, der auf eine einfache Schwingung reagiert, erläutert werden. Derselbe schwinge (die Bezeichnungen wie üblich) nach der Gleichung

$$x'' + 2bx' + p^2 x = A \sin nt. \qquad (1)$$

Die Integration ergibt für erzwungene Schwingungen, wie bekannt,

$$x = \frac{A}{\sqrt{(p^2 - n^2)^2 + 4b^2 n^2}} \sin(nt + \text{const}). \qquad (2)$$

Die „Resonanz" im engeren Sinne tritt ein, wenn der Nenner auf der rechten Seite ein Minimum wird. Helmholtz[1]) läßt das Minimum eintreten, wenn $p = n$ wird, und zieht den Schluß:

> „Das Mitschwingen ist um so stärker, je genauer die Schwingungszahl der zugeleiteten Bewegung mit der Schwingungszahl der reibungsfreien Eigenbewegung des erregten Körpers übereinstimmt."

1) E. Budde, Über die Resonanztheorie des Hörens, diese Zeitschr. **18**, 225 u. 249, 1917.

2) F. Küstner, Ann. d. Phys. **50**, 941, 1916.

1) Helmholtz, Tonempfindungen, 4. Aufl. Braunschweig 1877, 638. Auch Vorlesungen III, Leipzig 1898, 48.

Verschiedene Autoren, darunter auch ich[1]), haben geglaubt, diesen Satz für unrichtig erklären zu sollen; denn wenn man den Nenner nach $n$ differentiiert, erhält man als Bedingung für das Minimum die Gleichung

$$n^2 = p^2 - 2b^2. \qquad (3)$$

In Wirklichkeit zeigt diese Diskrepanz nur, daß zwei verschiedene Fragestellungen möglich sind. Die erste lautet: Gegeben ist eine Saite, deren freie Schwingung nach der Gleichung

$$x'' + 2bx' + p^2x = 0$$

vor sich gehen würde, deren Kreisfrequenz also bei freier Schwingung

$$\sqrt{p^2 - b^2}$$

wäre; wie groß muß die Kreisfrequenz desjenigen Tones $n$ gewählt werden, der die Saite zum maximalen Mitschwingen bringen soll? In diesem Falle ist $n$ die Variable, von der die Erscheinung abhängt, und die Antwort lautet: Es muß sein $n^2 = p^2 - 2b^2$.

Die zweite Fragestellung lautet: Gegeben ist ein objektiver Schallwellenzug von der Kreisfrequenz $n$ und eine Harfe mit unendlich vielen Saiten der Kreisfrequenzen $p$. Welche von diesen Saiten schwingt mit maximaler Amplitude mit? In diesem Falle ist $p$ die bestimmende Variable, und die Antwort lautet: Es muß $p = n$ sein.

Für die Resonanz im Ohr liegt offenbar der zweite Fall vor; die von Helmholtz gegebene Antwort ist also für die von ihm behandelte Frage richtig. Handelt es sich um ein außerhalb des Ohres angestelltes Experiment, so wird die Art der Fragestellung von der Anordnung der Apparate abhängen. Übrigens wird im praktischen Falle meistens $b$ so klein gegen $p$ sein, daß der Unterschied ziemlich belanglos ist, daß man also in der Rechnung die mathematisch bequemere Formel benutzen kann.

d) Hat man mit zwei Tönen der Kreisfrequenzen $p$ und $q$ zu tun, so ist zu bedenken, daß die Bestimmung einer Schwingungszahl nur mäßige Genauigkeit hat; einen Fehler von $^1/_{10000}$ anzunehmen, ist sicher zulässig; und die Stetigkeit der akustischen Erscheinungen berechtigt zu der Annahme, daß man charakteristische Beziehungen nicht übersehen oder verunstalten wird, wenn man für eine der beiden Größen $p$ oder $q$ eine Ungenauigkeit von so kleinem Betrage zuläßt. Infolgedessen kann man $p$ und $q$ immer als kommensurabel ansehen. Dann braucht man aber nur die Zeiteinheit passend zu wählen, um $p$ und $q$ zu ganzen Zahlen zu machen. Man beeinträchtigt also die Allgemeinheit nicht, wenn man $p$ und $q$ als ganze Zahlen behandelt. Ist dann $r$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $p$ und $q$, so ist offenbar $\frac{2\pi}{r}$ die Periode der Gesamterscheinung, welche durch die Kombination von $p$ und $q$ hervorgerufen wird. Eine endliche oder unendliche Summe von Cosinus und Sinus der Argumente $(\mu p + \nu q)t$, wo $\mu$ und $\nu$ beliebige ganze Zahlen sind, Null und negative Werte nicht ausgeschlossen, kann immer als Fouriersche Reihe mit dem Grundargument $rt$ angesehen werden.

e) Schon Helmholtz[1]) hat mit voller Deutlichkeit auf den innigen Zusammenhang zwischen Obertönen und Kombinationstönen hingewiesen: Ein resonierender Körper, der Kombinationstöne liefert, wenn er von zwei gleichzeitigen Wellenzügen getroffen wird, bildet Obertöne, wenn ihn ein einfacher Wellenzug trifft, und umgekehrt. Infolgedessen kann man vielfach, namentlich wenn es sich um wesentlich qualitative Erörterungen handelt, die Formeln dadurch kürzen, daß man nach Obertönen statt nach Kombinationstönen fragt. Von dieser Freiheit wird im folgenden Gebrauch gemacht.

§ 2. Der ursprüngliche Gedankengang Waetzmanns tritt am deutlichsten hervor aus den beiden Abhandlungen „Über die Bewegungsform elastischer Körper unter der Einwirkung auftreffender Schallwellen“[2]) und „Über unsymmetrische Schwingungen einseitig belasteter Gummihäute“[3]).

Waetzmann sagt:

> Man pflegt die Gleichung[4])
>
> $$x'' + 2bx' + p^2x = F \sin 2\pi nt \qquad (4)$$
>
> als mathematische Formulierung des Vorganges anzusehen, der sich abspielt, wenn eine einfache Tonwelle auf ein (durch einen schwingenden Punkt ersetzbares) Objekt auffällt. Da aber, wie bekannt, eine Tonwelle, die auf eine reflektierende Wand auftrifft, neben den periodischen Druckschwankungen noch einen einseitigen Überdruck auf die Wand ausübt, so stellt dieser Ansatz den physikalischen Vorgang nicht vollständig dar.

Waetzmann fügt daher auf der rechten Seite noch ein additives Druckglied zu und schreibt

1) E. Budde, Verh. d. D. phys. Ges. 13, 130, 1911.

1) H. Helmholtz, l. c. S. 263.

2) E. Waetzmann, Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 16, 424, 1914.

3) E. Waetzmann u. W. Moser, Verh. d. D. phys. Ges. 18, 13, 1917.

4) Die Gleichung ist hier gegen das Original durch Division mit der Masse $m$ gekürzt.

$$x'' + 2b\,x' + p^2 x = F \sin 2\pi n t + D. \quad (5)$$

Dieser Gedankengang scheint mir prinzipiell unrichtig; denn der Rayleighsche Schalldruck geht — soweit er überhaupt vorhanden ist — erst aus der Schwingungsgleichung (4) bzw. aus modifizierten Formen derselben hervor. Er besteht also nicht neben der Gl. (4), sondern Gl. (4) stellt den ganzen Vorgang einschließlich des Schalldruckes dar, solange man dem schwingenden Punkt eine lineare Differentialgleichung zuschreibt[1]).

Aber selbst wenn es anders wäre, würde sich aus Gl. (5) kein Oberton ergeben, solange die Schwingungsgleichung linear ist; denn in Gl. (5) braucht man nur $D$ auf die linke Seite zu bringen, so erhält man

$$x'' + 2b\,x' + p^2\left(x - \frac{D}{p^2}\right) = F \sin 2\pi n t, \quad (6)$$

und wenn man darin setzt

$$x - \frac{D}{p^2} = y, \quad (7)$$

ergibt sich

$$y'' + 2b\,y' + p^2 y = F \sin 2\pi n t, \quad (8)$$

also wieder eine symmetrische Schwingung, die sich von der durch Gl. (4) dargestellten nur dadurch unterscheidet, daß sie nicht um den Mittelpunkt $x = 0$, sondern um den Mittelpunkt $x = \frac{D}{p^2}$ stattfindet.

Aus der Zufügung eines asymmetrischen konstanten Gliedes zur Schwingungsgleichung ergibt sich also nichts weiter als eine „Nullpunktsverschiebung" der Schwingung. Und diese tritt in der Tat aus den von Waetzmann und Moser gegebenen Kurven sehr schön hervor. Die Kurven b und c ihrer Fig. 1 bleiben aber dabei, soviel man mit bloßem Auge sehen kann, einfache Sinusoiden, wie es der Gl. (8) entspricht. Ob die Kurven der Fig. 3 Kombinationstöne enthalten, ist fraglich; wäre es der Fall, so würde darin nichts weiter liegen als der Beweis, daß die Schwingungen der einseitig belasteten Gummihaut durch die Gl. (5) nicht vollständig dargestellt werden.

Asymmetrische Gestalt des schwingenden Objekts genügt nicht, um Obertöne und Kombinationstöne hervorzurufen; dazu ist vielmehr, wie Helmholtz[1]) bereits mit gewohnter Schärfe hervorgehoben hat, erforderlich, daß die positiven und negativen Verschiebungen, bzw. die durch diese hervorgerufenen Kräfte, gegen die Ruhelage des Körpers asymmetrisch seien.

Um weiteren Mißverständnissen vorzubeugen, ist es vielleicht zweckmäßig, noch folgende Erwägung anzustellen: Es seien zwei Druckwellen gegeben, die zusammen dargestellt werden durch die Gleichung

$$p = F \sin 2\pi m t + G \sin 2\pi n t. \quad (9)$$

Es sei $r$ der größte gemeinschaftliche Divisor von $m$ und $n$, und zwar sei

$$m = \mu r, \quad n = \nu r,$$

so daß die vorstehende Gleichung sich schreiben läßt

$$p = F \sin 2\pi \mu r t + G \sin 2\pi \nu r t,$$

wo $\mu$ und $\nu$ ganze relative Primzahlen sind. Dann ist $\frac{1}{r}$ die Gesamtperiode der Erscheinung.

Bildet man nun das Zeitmittel über eine ganze Periode, so erhält man selbstverständlich

$$r \int_{t=0}^{t=\frac{1}{r}} (F \sin 2\pi \mu r t + G \sin 2\pi \nu r t)\, dt = 0.$$

Mittelt man aber nur über die halbe Periode, so ergibt sich

$$2r \int_{0}^{\frac{1}{2r}} (F \sin 2\pi \mu r t + G \sin 2\pi \nu r t)\, dt =$$

$$= -\frac{F}{\pi\mu}(\cos \mu\pi - \cos 0) - \frac{G}{\pi\nu}(\cos \nu\pi - \cos 0).$$

Von den beiden Zahlen $\mu$ und $\nu$ ist notwendig wenigstens eine ungerade. Nehmen wir an, $\mu$ sei diese ungerade Zahl, so ergibt sich für den Druck der mittlere Wert

$$\bar{p} = \frac{2F}{\pi\mu} + \frac{G}{\pi\nu}\left[1 - (-1)^{\nu}\right].$$

Selbstverständlich ergibt sich der entgegengesetzte Wert, wenn man das Mittel über den Zeitraum

$$t = \frac{1}{2r} \text{ bis } t = \frac{1}{r}$$

bildet. Im allgemeinen ergibt sich also wäh-

1) Außerdem ist zu bemerken, daß der konstante Rayleighsche Schalldruck, welchen das Glied $D$ darstellt, aus einer Mittelbildung über unendliche Zeit oder, was dasselbe sagt, über eine ganze Periode hervorgeht. Und wenn man eine lineare Sinusfunktion über eine ganze Periode integriert, erhält man als Mittelwert stets Null. Wenn ich Herrn Waetzmann richtig verstehe, ist er der gleichen Ansicht, solange es sich um eine einfache harmonische Schwingung handelt, glaubt aber, daß ein endlicher Schalldruck zustande kommt, wenn zwei Töne miteinander schweben. Aber auch in diesem Fall ergibt die Mittelbildung, wie auf der folgenden Seite gezeigt wird, den Rayleighschen Schalldruck Null, solange man nur mit linearen Gleichungen rechnet, und liefert nichts, was für die Erklärung der Kombinationstöne brauchbar wäre.

1) H. Helmholtz, l. c. S. 652.

rend der ersten Halbperiode ein mittlerer Überdruck nach der einen, und während der darauf folgenden Halbperiode ein ebenso großer Druck nach der anderen Seite. Man erhält also tatsächlich zwei entgegengesetzte „Schalldrucke" (das Wort in etwas weiterem als dem Rayleighschen Sinne genommen), von denen jeder während der Hälfte einer Periode andauert. Es wäre aber durchaus falsch, daraus nun den Schluß zu ziehen, daß diese beiden Schalldrucke nunmehr der Gl. (9) zuzurechnen wären, daß man also in Wirklichkeit zu schreiben hätte

$$p = F \sin 2\pi mt + G \sin 2\pi nt + \frac{2F}{\pi\mu} \text{ usw.};$$

denn die fraglichen Drucke bestehen ja nicht neben der Gl. (9), sondern sind schon in ihr enthalten.

Ebenso leicht ist nachzuweisen, daß man keine Kombinationstöne erhält, wenn man in Gl. (9) auf der rechten Seite noch ein konstantes Glied $D$ zufügt.

Das Gesagte bestätigt den allgemein angenommenen Helmholtz-Cl. Schäferschen Satz: Ohne quadratisches Glied liefert die Theorie weder Obertöne noch Kombinationstöne.

§ 3. Die Theorie von Küstner unterscheidet sich nun von der Helmholtz-Cl. Schäferschen dadurch, daß sie dieses quadratische Glied nicht in die Schwingungsgleichung des resonierenden Körpers, sondern in diejenige des schallleitenden Mediums (Luft) verlegt. Die Bewegung wird eindimensional behandelt. Ist $x$ die Koordinate, $\Phi$ das Geschwindigkeitspotential in der Luft, $p$ der veränderliche Druck in derselben, $p_0$ der Druck in der Ruhe, so leitet Küstner in Abwesenheit äußerer Kräfte für die Luft die Gleichungen ab ($a$ eine Konstante)

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial\Phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial t} + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (10)$$

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{a^2}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right]}. \quad (11)$$

Hierbei sind folgende Vereinfachungen eingeführt: 1. Es sind die Schwingungsgleichungen eines reibungsfreien Gases benutzt. Das ist sicher unbedenklich, hat aber die (gleichfalls unbedenkliche) Nebenwirkung, daß in der späteren Formel für das Geschwindigkeitspotential ein Divisor auftritt, der es verbietet, Schallschwingungen zu verwenden, die in der benutzten Röhre (siehe unten) Resonanz erregen. 2. Es ist isotherme Leitung in der Luft vorausgesetzt. In freier Luft wäre wohl eher adiabatische Leitung anzunehmen. Ich gehe auf den adiabatischen Fall nicht ein, da Herr Cl. Schäfer mir mitgeteilt hat, daß er demnächst in Verbindung mit Herrn F. A. Schulze eine kritische Arbeit über Schalldruck bei beliebigem Druckgesetz veröffentlichen will.

Macht man nun, wie gewöhnlich, die Annahme, die Amplitude der behandelten Schwingungen sei unendlich klein, so sind die Glieder zweiter Dimension in $\Phi$ und $p$ zu vernachlässigen. Man erhält dann aus den Gl. (10) und (11) die gewöhnliche Wellengleichung

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

und die Druckgleichung

$$p = p_0\left(1 - \frac{1}{a^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right). \quad (13)$$

Diese werden auf folgenden Fall angewendet: Ein Rohr von der Länge 1 liege mit seiner Achse parallel der $x$-Achse. Das hintere Ende $x = 1$ sei durch eine starre Wand verschlossen; am vorderen Ende $x = 0$ werde dem Gase zwangsweise eine Wellenbewegung erteilt, so daß dort die Geschwindigkeit $nA\cos nt$ stationär herrscht. Es gelten also für die beiden Enden des Rohres die Randbedingungen

$$\text{Für } x = 0 \text{ ist } \frac{\partial\Phi}{\partial x} = nA\cos nt, \quad (14)$$

$$\text{Für } x = 1 \text{ ist } \frac{\partial\Phi}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

Zunächst wird nun nachgewiesen, daß der Rayleighsche Schalldruck unter den Bedingungen (12) und (13) Null ist. Dann aber wird die Entwicklung von

$$e^{-\frac{1}{a^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t}}$$

um ein Glied weiter getrieben als in Gl. (13). Es wird also gerechnet mit den beiden Gleichungen

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = 0, \quad (16)$$

$$p = p_0\left[1 - \frac{1}{a^2}\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2a^4}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)^2\right]. \quad (17)$$

Hierin liegt eine neue Vernachlässigung; wenn man nämlich die Glieder zweiten Grades in Gl. (17) beachtet, so darf man folgerichtig auch die entsprechenden Glieder in Gl. (10) und (11) nicht vernachlässigen. Küstner weist aber in einem Nachtrage nach, daß sein Hauptergebnis nicht geändert wird, wenn man diese Vernachlässigung fallen läßt. Er findet mit den angegebenen Mitteln einen von Null verschie-

denen Rayleighschen Schalldruck, Obertöne und Kombinationstöne.

Wir wollen hier auch die letzte von Küstner eingeführte Vernachlässigung beibehalten; man wird leicht sehen, daß die unten zu ziehenden Vergleiche dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt werden. Wir setzen aber nun an die Stelle der starren Wand, die bei Küstner am Ende $x=1$ die Röhre verschließt, eine bewegliche, zum Mitschwingen befähigte Platte. Die Platte könne Schwingungen in der $x$-Richtung machen und sei elastisch an ihre Ruhelage gebunden; es werde ihr auch eine gewisse Dämpfung zugeschrieben, so daß sie für sich allein, wenn sie frei wäre, eine Schwingungsgleichung

$$x'' + 2b\,x' + p^2(x-1) = 0 \qquad (18)$$

haben würde. Im Experiment wird die wirkliche Platte in der Regel in der Lage sein, Energie an die Luft abzugeben, und diese Abgabe kann je nach der Art des Versuchs recht verschieden sein. Um die daraus für die Rechnung entstehenden Komplikationen zu vermeiden, fingieren wir, das Rohr beginne links bei $x=0$, die resonierende Platte liege bei $x=1$, das Rohr sei verlängert und auf der rechten Seite der Platte sei eine zweite Anregung vorhanden, die das Spiegelbild der links gegebenen mit genau umgekehrter Phase ist, so daß also zu der Zeit, wo die Verdichtung der Luft auf der linken Seite der Platte ihr Maximum hat, auf der rechten Seite die stärkste Verdünnung herrscht usw. Der Gesamtdruck auf die Platte ist dann in jedem Augenblick das Doppelte von dem, der von der bei $x=0$ eintretenden Anregung herrührt.

Unter den hier vorausgesetzten Umständen ist die zweite Randbedingung, Gleichung (15) für $x=1$ offenbar nicht mehr brauchbar. Da die Luft sich von der Platte nicht entfernen kann, muß die Bewegung derjenigen Luftschicht, welche der Platte unmittelbar anliegt, mit derjenigen der Platte selbst übereinstimmen. Von vornherein läßt sich aber nicht behaupten, daß die resonierende Platte dieselbe Phase haben wird, die in der Luft an der Stelle $x=1$ vorhanden sein würde, wenn die Platte nicht vorhanden wäre. Es ist also vorauszusetzen, daß die Luft an der Stelle $x=1$ in irgendeiner noch nicht bekannten Phase schwingen wird. Ferner ist von vornherein darauf Rücksicht zu nehmen, daß die resonierende Platte möglicherweise Obertöne bilden kann; wir wollen aber nur den ersten Oberton berücksichtigen, schreiben also der Platte eine Bewegung zu, welche durch trigonometrische Funktionen von $nt$ und $2nt$ dargestellt werden kann. Dann lautet die zweite Randbedingung offenbar:

Für $x=1$ ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = Bn\cos nt + Cn\sin nt + 2Dn\cos 2nt + 2En\sin 2nt, \qquad (19)$$

wo $B$, $C$, $D$, $E$ vorläufig unbekannte Konstanten sind. Die beiden Randbedingungen (14) und (19) sind erfüllt, wenn man setzt

$$\Phi = \frac{aA\cos\left[\frac{n}{a}\left(x-1\right)\right] - aB\cos\frac{n}{a}x}{\sin\frac{n}{a}}\cos nt - \frac{aC}{\sin\frac{n}{a}}\cos\frac{n}{a}x\sin nt - \frac{aD}{\sin\frac{2n}{a}}\cos\frac{2n}{a}x\cdot\cos 2nt - \frac{aE}{\sin\frac{2n}{a}}\cos\frac{2n}{a}x\cdot\sin 2nt. \qquad (20)$$

Wir schreiben hierfür abkürzend

$$\Phi = f_1(nt) + f_2(2nt).$$

Berücksichtigt man nun in der Reihenentwicklung von

$$e^{-\frac{1}{a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}}$$

noch das quadratische Glied, so hat man gemäß Gl. (17) zu setzen

$$p - p_0 = p_0\left[-\frac{1}{a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2a^4}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2\right];$$

also wird der variable Druck auf die Platte

$$2(p-p_0) = -\frac{2p_0}{a^2}\left[\left[f_1'(nt) + f_2'(2nt)\right] - \frac{1}{2a^2}\left[f_1'(nt) - f_2'(2nt)\right]^2\right]. \qquad (21)$$

Man sieht ohne weiteres, daß das quadratische Glied nach den bekannten Formeln

$$\cos^2\eta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\eta,$$

$$\sin^2\eta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2\eta,$$

$$\cos\eta\cos\vartheta = \frac{1}{2}\cos(\eta+\vartheta) + \frac{1}{2}\cos(\eta-\vartheta)$$

usw.

erstens konstante Anteile, zweitens Cosinus und Sinus von $2nt$, drittens solche von $(2+1)nt$, also auch solche von $3nt$, viertens solche von $4nt$ liefert. Da wir überhaupt nur bis zu Gliedern zweiter Ordnung rechnen wollen, erhalten wir schließlich einen Ausdruck von der Form

$$2(p-p_0) = F + G\cos nt + H\sin nt + I\cos 2nt + K\sin 2nt. \qquad (22)$$

Das ist nun der Druck, unter dem die Platte schwingt. Ihre Schwingungsgleichung wird also

$$x'' + 2bx' + q^2(x-1) = 2(p-p_0), \quad (23)$$

wo $2(p-p_0)$ zur Abkürzung für den Ausdruck auf der rechten Seite von Gl. (22) steht. Die erzwungenen Schwingungen, welche aus ihr hervorgehen, sind in bekannter Weise leicht zu ermitteln; die Lösung hat die Form

$$x - \left(1 + \frac{F}{q^2}\right) = P\cos nt + Q\sin nt + R\cos 2nt + S\sin 2nt. \quad (24)$$

Bedenkt man nun, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ für $x = 1$ identisch mit $\frac{dx}{dt}$ sein muß, so liefert die vorstehende Gleichung offenbar die Mittel, die Größen $G$, $H$ usw., und damit auch die $B$, $C$, $D$, $E$ der Gl. (20) durch $A$ auszudrücken. Die Ausrechnung kann hier übergangen werden, da Gl. (23) mit (22) ausreicht, um die uns interessierenden Folgerungen abzuleiten. Man erhält offenbar

1. einen konstanten Schalldruck, also eine „Nullpunktsverschiebung" der schwingenden Platte,
2. Grundtöne $n$,
3. Obertöne $2n$,

qualitativ dasselbe, was sich aus Küstners Originalrechnung für den Abschluß der Röhre durch eine feste Wand ergibt. Über diese qualitativen Ergebnisse soll hier nicht hinausgegangen werden; zu quantitativen Feststellungen reichen die Grundlagen meines Erachtens noch nicht aus. Man ersieht das schon aus den vielen eingeführten Vernachlässigungen, es hat aber auch noch tiefere Gründe, auf die ev. später einzugehen sein wird.

§ 4. Vergleich der verschiedenen Theorien. Einstweilen ergeben sich folgende Schlüsse:

A. Theorie von Helmholtz. Die Bildung von $OT$ und $KT$ hat ihren Grund in einer besonderen Eigenschaft des resonierenden Körpers. Eine gegen die Schallrichtung asymmetrische Gleichgewichtsgestalt, wie sie z. B. in der Waetzmann-Moserschen Gummihaut gegeben ist, reicht an sich noch nicht aus, um $OT$ und $KT$ hervorzurufen; vielmehr muß dazu die Schwingung selbst asymmetrisch gegen die irgendwie gestaltete Gleichgewichtslage sein. Da sich in den Helmholtzschen Gleichungen auf der rechten Seite konstante Glieder[1]) finden, ist die Resonanzschwingung mit einer Nullpunktsverschiebung verbunden.

B. Theorie von Helmholtz mit der Abänderung von F. A. Schulze. Es wird eine Differentialgleichung angenommen, die gleich der Helmholtzschen ein quadratisches Glied $qx^2$ enthält; Schulze nimmt aber an, daß die Konstante $q$ bei jedem Durchgang durch die Ruhelage einen Vorzeichenwechsel erleidet. Die Schwingung wird dann natürlich symmetrisch. Mir scheint aber, daß für diese Annahme bei den Resonatoren gewöhnlicher Art keine rechte mechanische Begründung vorliegt. Will man einem schwingungsfähigen Körper symmetrische Schwingungen zuschreiben, die ihrer Größe wegen nicht mehr mit einer rein linearen Schwingungsgleichung verträglich sind, so ist es wohl das Nächstliegende, anzunehmen, daß sie ein Glied $qx^3$ enthält. Man ersieht ohne weiteres, daß diese Annahme zu nahe denselben Folgerungen führt, wie die Schulzesche Abänderung: Der resonierende Körper bildet die $OT$ und $KT$; die Schwingung wird symmetrisch.

C. Von der Theorie von Cl. Schäfer betrachten wir nur den von Schäfer selbst bevorzugten Fall der quadratischen Dämpfung; die Schwingungsgleichung enthält ein Glied $qx'^2$. Daß dieses Glied beim Richtungswechsel der Schwingung sein Vorzeichen ändert, ist eine naturgemäße Annahme. Auch hier ist der resonierende Körper das Organ, welches die $OT$ und $KT$ bildet. Eine mittlere Nullpunktsverschiebung kann offenbar nicht eintreten; denn selbst wenn die Einzelbewegung eine solche Verschiebung enthielte, würde sie ja von einer Halbschwingung zur anderen das Vorzeichen wechseln, im Mittel also den Betrag Null ergeben. Der bezeichnende Unterschied gegen Helmholtz besteht, wie schon früher erwähnt, darin, daß die Amplitude der $KT$ nach Helmholtz einfach dem Produkt $AB$ aus den Amplituden $A$ und $B$ der beiden kombinierten Töne $m$ und $n$, daß sie aber nach Schaefer mit $ABmn$ proportional ist; sie wächst also mit der Höhe der Primärtöne. Entsprechendes gilt für die Intensität der $OT$.

In meinem Referat habe ich einen Versuch von Waetzmann angeführt, der objektive $KT$ in einer Telephonmembran im Vakuum hervorgebracht hat und daraus schließt, daß die Kombinationstöne auch unter Bedingungen auftreten, wo die quadratische Dämpfung nahe verschwindet. Ferner habe ich den Versuch

1) Z. B. l. c. S. 651 in $x_2$ das Glied $\frac{-b}{2a}(u^2 + v^2)$. Diese Gleichung ist übrigens, wenigstens in der vierten Auflage der „Tonempfindungen", stark verdruckt; im dritten Gliede auf der rechten Seite steht $u^2$ statt $v^2$, und in allen Gliedern mit Ausnahme des ersten fehlt der Faktor $b$. (Schreibweise des Originals.)

von Waetzmann und Mücke zitiert, bei welchem die $KT$ um so stärker hervortraten, je höher die Primärtöne lagen. Herr Cl. Schäfer hat mich mit Recht darauf aufmerksam gemacht, daß diese Versuche ohne nähere Nachprüfung nicht zu bestimmten Schlüssen führen, weil bei ihnen Mikrophone verwendet worden sind, die Asymmetrie der Wirkungen also wenigstens teilweise diesen Mikrophonen zuzuschreiben ist.

D. Die Küstnersche Theorie verlegt die Ursache der $OT$ und $KT$ nicht in den resonierenden Körper, sondern in das leitende Medium. Es folgt unmittelbar, daß jeder resonierende Körper, einerlei ob symmetrisch oder asymmetrisch, $OT$ und $KT$ liefern muß. Die $OT$ und $KT$ sind dabei objektiv in der Luft vorhanden, müssen also auch mit Helmholtzschen Resonatoren nachweisbar sein. Ferner müssen die bekannten Nebenwirkungen der Schalleitung mit quadratischem Glied eintreten:

1. Die Schallgeschwindigkeit in der Luft wird von der Intensität des Tones abhängig[1],

2. ein einfach erzeugter Ton wird nicht als solcher fortgeleitet, sondern bildet in der Luft von selbst Obertöne.

Hiermit ist offenbar schon eine ganze Reihe von Aufgaben und Anhaltspunkten für die experimentelle Untersuchung gegeben. Handelt es sich um die Deutung einer gegebenen konkreten Erscheinung, so treten alle im Vorstehenden aufgezählten Möglichkeiten in Wettbewerb; es ist auch durchaus denkbar, daß mehrere der theoretisch möglichen Ursachen zusammenwirken. Im übrigen besteht zwischen der Küstnerschen Theorie und den anderen ein für den Versuch prinzipieller Unterschied: Hat die Luftleitung bei gegebener Intensität der Primärtöne nichtlineare Glieder, so läßt sich diese ihre Eigenschaft nicht ausschalten; erfolgt die Luftleitung nach einer linearen Gleichung, so können die Apparate vielleicht so eingerichtet werden, daß die eine oder andere der möglichen Ursachen, wenn auch nicht ausschließlich, so doch vorwiegend in Wirkung tritt.

1) Vgl. H. Kayser, Wied. Ann. **6**, 465, 1879; das Ergebnis dieser Arbeit spricht nicht für einen erheblichen Betrag des quadratischen Gliedes der Luftleitung. Andererseits läßt die Empfindlichkeit des von H. Rubens konstruierten Schallradiometers keinen Zweifel an seiner Merklichkeit.

(Eingegangen 2. April 1918.)

## Mechanische Theorien des elektromagnetischen Feldes.

Von A. Korn.

### IX.

### Die Grundlagen der mechanischen Theorie der Reibung.

Wie die universelle Grundschwingung (man vgl. Abh. VIII)[1]):

$$u = \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} \sin \frac{t}{T_0} 2\pi, \quad v = \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} \sin \frac{t}{T_0} 2\pi,$$

$$w = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \sin \frac{t}{T_0} 2\pi,$$

bei welcher in erster Annäherung ($R$ Radius, $r$ Abstand vom Zentrum des Teilchens):

$\Phi_0 = \text{const} \dfrac{\sin k_0 r}{r}$, in jedem Teilchen,

$\Phi_0 = \text{const} \dfrac{1}{r}$ in der Nähe des Teilchens im Äther

und

$$k_0 = \frac{\pi}{2R}, \qquad T_0 = \left| \frac{2\pi c}{k_0} \right|,$$

wo $c^2$ eine den schwach kompressiblen Teilchen zugehörige Konstante ist, eine Wechselwirkung je zweier Teilchen bedingt, für welche in erster Annäherung das Newtonsche Gravitationsgesetz gilt, so werden sich natürlich infolge der universellen Oberschwingungen weitere Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen ergeben. Man kann von vornherein übersehen, daß diese weiteren Wechselwirkungen einer höheren Potenz der Zentraldistanz, als der zweiten umgekehrt proportional sein werden, so daß das Newtonsche Gesetz überwiegen wird, solange die Entfernung zweier Teilchen eine gewisse Größe übersteigen wird; wenn sich aber zwei Teilchen einander weiter nähern, werden die neuen Gesetze in Geltung treten, so z. B., wenn wir zwei Teilchen, wie in einem Gase, betrachten, welche aufeinander zufliegen. Die Erfahrung weist uns schon darauf hin, daß das Anziehungsgesetz dann in einer gewissen Entfernung in ein Abstoßungsgesetz übergehen wird; Maxwell hat dieses Gesetz für seine Gastheorie postuliert, und auch in der Theorie der elastischen Stöße kann man ja die elastische Zurückstoßung bei dem Stoße zweier Teilchen, wenn man will, so deuten, daß es gar nicht zu einem wirklichen Zusammenstoße kommt, sondern daß schon vorher abstoßende Kräfte die Zurückwerfung besorgen.

Man kann nun zeigen, daß sich das Maxwellsche Abstoßungsgesetz (Abstoßung zweier

1) Diese Zeitschr. **19**, 234, 1918.

Teilchen umgekehrt proportional der fünften Potenz ihrer Entfernung) auf Grund der ersten Oberschwingung der universellen Schwingungen herleiten läßt.

Betrachten wir zunächst wieder ein einziges kugelförmiges Teilchen im Äther, so ist die Lösung des Problems

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Phi_1 &= 0, \text{ im Äther,} \\ \Delta\Phi_1 + k_1^2\Phi_1 &= 0, \text{ in dem Teilchen,} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

wenn $k_1$ der kleinste positive mögliche Wert

$$> k_0 = \frac{\pi}{2R}$$

ist:

$$k_1 = \frac{\pi}{R} \quad (2)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= c\,\frac{\cos(r\,h)}{r^2}, \text{ im Äther,} \\ \Phi_1 &= \frac{c}{\pi}\,\frac{\sin k_1 r - k_1 r\cos k_1 r}{r^2}\cos(r\,h), \\ &\text{in dem Teilchen,} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

wenn wir mit $c$ eine beliebige Konstante, mit $h$ eine beliebige Richtung, mit $R$ den Radius des Teilchens und mit $r$ die Entfernung und Richtung

$$\text{Zentrum des Teilchens} \;\rightarrow\; (x, y, z)$$

bezeichnen[1]).

Die erste Oberschwingung entspricht einer Oszillation des Teilchens in der im übrigen beliebigen (Oszillations-)Richtung $h$. Die Bewegungen in dem Teilchen weichen natürlich ein wenig von den Bewegungen einer starren Oszillation ab, die Bewegung der Oberfläche ist aber dieselbe, wie die einer starren Oszillation, und die Bewegungen im Äther gehen ebenso vor sich, wie die Bewegungen einer inkompressiblen Flüssigkeit, in welcher ein starres Teilchen oszilliert.

Wenn wir nun wieder an Stelle eines Teilchens eine Vielheit solcher annehmen, bei der Voraussetzung, daß die Radien $R$ der Teilchen — die wir wieder alle gleich voraussetzen — gegen die Zentraldistanzen klein sind, so wird sich die dann entstehende erste Oberschwingung in jedem Teilchen und in der Nähe jedes Teilchens in erster Annäherung so bestimmen, als ob das betreffende Teilchen im Äther allein vorhanden wäre, d. h. in erster Annäherung wird das Potential $\Phi_1$ wieder in jedem Teilchen mit dem Zentrum $(x_j, y_j, z_j)$ und dem Radius $R$ und in der Nähe des Teilchens von der Form sein:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= c_j\,\frac{\cos(r_j\,h_j)}{r^2}, \text{ im Äther in der Nähe} \\ &\text{des Teilchens } j, \\ \Phi_1 &= \frac{c_j}{\pi}\,\frac{\sin k_1 r_j - k_1 r_j\cos k_1 r_j}{r_j^2}\cos(r_j\,h_j), \\ &\text{in dem Teilchen } j, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und in erster Annäherung wieder:

$$k_1 = \frac{\pi}{R}, \quad (5)$$

wobei die $c_j$ Konstanten, die $h_j$ gewisse Richtungen vorstellen; unter $r_j$ wird der Abstand und die Richtung

$$(x_j, y_j, z_j) \;\rightarrow\; (x, y, z)$$

verstanden. Wenn wir eine weitere Annäherung berechnen, ergeben sich zunächst zwischen den $c$, den Richtungskosinussen

$$\cos(h, x),\ \cos(h, y),\ \cos(h, z)$$

und $k_1$ die $3j$ Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} c_j\cos(h_j, x)\sin k_1 R &= \frac{3}{\pi}R^3\frac{\partial}{\partial x_j}\Sigma_i c_i\,\frac{\cos(\varrho_{ji}, h_i)}{\varrho_{ji}^2}, \\ c_j\cos(h_j, y)\sin k_1 R &= \frac{3}{\pi}R^3\frac{\partial}{\partial y_j}\Sigma_i c_i\,\frac{\cos(\varrho_{ji}, h_i)}{\varrho_{ji}^2}, \\ c_j\cos(h_j, z)\sin k_1 R &= \frac{3}{\pi}R^3\frac{\partial}{\partial z_j}\Sigma_i c_i\,\frac{\cos(\varrho_{ji}, h_i)}{\varrho_{ji}^2}, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

wenn wir mit $\varrho_{ji}$ die Entfernung und Richtung

$$(x_j, y_j, z_j) \;\rightarrow\; (x_i, y_i, z_i)$$

bezeichnen und die Summen $\Sigma_i$ über alle Teilchen mit Ausnahme des Teilchens $j$ erstrecken. Die Gleichungen bestimmen in zweiter Annäherung $k_1$, die Richtungen $h_j$ und die Verhältnisse der $c_j$[1]).

Es ist nunmehr einfache Rechnungssache, auch wieder $\Phi_1$ in zweiter Annäherung in den Teilchen und im Äther in der Nähe der Teilchen zu berechnen und dann mit Hilfe der Formeln:

$$X_j = -\mu\frac{k_1^2}{4\pi}\int_{\omega_j}\Phi_1^2\cos(\nu\,x)\,d\omega, \quad \ldots \quad (7)$$

die scheinbaren Kräfte zu finden, welche jedes Teilchen $i$ auf jedes Teilchen $j$ ausübt. Es ergibt sich das Resultat:

Vernachlässigt man bereits Größen, in denen $\varrho_{ji}^5$ im Nenner vorkommt, so übt jedes Teilchen $i$ auf jedes Teilchen $j$ die scheinbaren Kraftkomponenten aus:

1) Eine mechanische Theorie der Reibung. (Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901), S. 154—156.

1) Eine mechanische Theorie der Reibung, S. 156 bis 176. Es bleibt dabei eine große Willkürlichkeit für die Bestimmungsstücke, wie von vornherein zu erwarten ist, abgesehen von $k_1$, für das in zweiter Annäherung $\sin k_1 R$ wirklich bestimmt wird.

$$X_j^i = 2\pi\mu c_i c_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\frac{\cos(h_i h_i) - 3\cos(\varrho_{j\,i} h)\cos(\varrho_{j\,i} h_i)}{\varrho_{j\,i}^3}\right], \ldots \quad (8)$$

vernachlässigt man aber erst Größen, in denen bereits die $\varrho^6_{j\,i}$ im Nenner vorkommen, so kommen für jedes Teilchen $j$ noch die Kraftkomponenten

$$\Xi_j = -\mu\pi R \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\Sigma_i c_j \frac{\cos(\varrho_{j\,i} r_i)}{\varrho^2_{j\,i}}\right]^2, \ldots \quad (9)$$

hinzu[1]).

Die ersteren Kraftkomponenten sind dieselben, welche ein magnetisches Teilchen $i$ mit der magnetischen Achse $h_i$ auf ein magnetisches Teilchen $j$ mit der magnetischen Achse $h_j$ ausüben würde, bei geeigneter Definition der magnetischen Momente, nur mit den umgekehrten Vorzeichen, in Übereinstimmung mit früheren Resultaten von C. A. Bjerknes; für unsere Theorie der Reibung werden diese Komponenten $X_j^i\ Y_j^i\ Z_j^i$ gar nicht in Betracht kommen, sondern im wesentlichen nur die Komponenten $\Xi_j H_j Z_j$. Wir wollen in der Tat nicht die Wechselwirkung zweier einzelner oszillierender Teilchen berechnen, sondern zwei Komplexe von oszillierenden Teilchen betrachten; jeder Komplex soll aus einer großen Anzahl von ungeordnet durcheinander fliegenden Teilchen bestehen, so daß auch die Oszillationsrichtungen der Teilchen alle möglichen Richtungen einnehmen werden. Man könnte zunächst denken, daß die Gerade, welche die Schwerpunkte der beiden Komplexe verbindet, eine wesentlich bevorzugte Richtung für die Oszillationen sein wird, doch kann man leicht erkennen, daß, wenn nur die Entfernungen der Teilchen des einen Komplexes von den Teilchen des anderen Komplexes gegen die Dimensionen innerhalb jeden Komplexes groß sind, auch in zweiter Annäherung keine Bevorzugung einer Richtung innerhalb jeden Komplexes angenommen zu werden braucht. Da in jedem Komplexe Oszillationen nach allen möglichen Richtungen stattfinden, ohne Bevorzugung einer Richtung, so werden sich bei der Berechnung einer Gesamtwirkung des einen Komplexes auf den anderen die linearen Kräfte (8) gegenseitig aufheben, und es werden nur die mit quadratischen Gliedern behafteten Kraftkomponenten (9) in Betracht zu ziehen sein. Wir müssen dabei noch eine genaue Erklärung darüber hinzufügen, was wir unter einer Gesamtwirkung eines Komplexes auf den anderen verstehen wollen: Wir wollen als Kraftkomponenten der Gesamtwirkung auf einen Komplex diejenigen translatorischen Kraftkomponenten verstehen, welche sich aus den Einzelkräften ergeben würden, wenn in dem betreffenden Momente alle Teilchen des Komplexes als Teilchen eines starren Körpers zu betrachten wären, so daß sich also die Kraftkomponenten der Gesamtwirkung aus den Einzelkräften additiv zusammensetzen. Zunächst sind bei unseren Voraussetzungen natürlich keinerlei physikalische Grundlagen dafür vorhanden, jeden Komplex auch nur annähernd wie einen starren Körper zu behandeln, man kann sich aber vorstellen, daß infolge höherer universeller Schwingungen Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Teilchen des Komplexes vorhanden sind, welche dafür sorgen, daß die Mittellagen der Teilchen sich nur wenig von den Mittellagen der Teilchen eines starren Komplexes entfernen, und man kann die mechanische Theorie solcher annähernd starren Körper vorläufig verschieben; in der Tat kann die Theorie der elastischen Körper, sowie die Theorie der Kapillarität auf Grundlage der Theorie der universellen Schwingungen behandelt werden. Indem wir bereits die Möglichkeit einer solchen Erklärung antizipieren, können wir sagen, daß nicht bloß die Bewegung des Schwerpunktes jedes Komplexes, sondern die Bewegung jedes Komplexes selbst durch die Kraftkomponenten der Gesamtwirkung bestimmt wird, und wir kommen nach den Formeln (9) zu dem Resultate, daß infolge der universellen Oszillationen der eine Komplex auf den anderen eine Gesamtwirkung ausübt, welche der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt proportional abstoßend wirkt.

Diese mechanische Ableitung des Maxwellschen Abstoßungsgesetzes gestattet nach dem Vorgange Maxwells nunmehr auch eine mechanische Theorie der Gase unter Berücksichtigung der Reibung und Wärmeleitung aufzustellen, indem wir die Bausteine des Gases als solche Komplexe mit universellen Oszillationen begabter Teilchen auffassen. Sie kann überhaupt als Grundlage jeder mechanischen Theorie der Reibung[1]) in kontinuierlichen Massensystemen gelten, wenn wir allgemein Massensysteme als kontinuierlich bezeichnen, deren Dichtigkeit $\mu$ und Geschwindigkeit $u, v, w$ in sehr kleinen Raumteilen Mittelwerte besitzen, welche in erster Annäherung als stetige Funktionen der Zeit und der Stelle betrachtet werden können.

Wenn zwischen den Bausteinen solcher Massensysteme Abstoßungen stattfinden, welche der fünften Potenz der Entfernung umgekehrt

1) Eine mechanische Theorie der Reibung l. c.

1) Eine mechanische Theorie der Reibung, S. 196 bis 212.

proportional sind, und wenn wir das System als inkompressibel oder als schwach kompressibel voraussetzen, erhalten wir an Stelle der Bewegungsgleichungen

$$\mu \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \ldots$$

in zweiter Annäherung die Bewegungsgleichungen[1]):

$$\mu \frac{du}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{p}{3k\mu} \Delta u, \ldots \quad (10)$$

wobei $k$ eine spezifische Konstante des Mediums ist. $\frac{p}{3k\mu}$ wird auch als Reibungskoeffizient an der Stelle $(x, y, z)$ zur Zeit $t$ bezeichnet.

Bewegt sich in einem solchen mit Reibung begabten Medium ein starres Teilchen mit einer Geschwindigkeit $V$ in einer Richtung $s$, so wird durch das Medium auf das Teilchen eine verlangsamende Kraft ausgeübt, welche der absoluten Geschwindigkeit proportional ist. Dieses Resultat brauchen wir hier nicht mehr besonders abzuleiten, da es eine bekannte Errungenschaft der Mechanik ist[1]); daß wir zu demselben auf wirklich rein mechanischem Wege gelangt sind, ist das Hauptresultat dieser Untersuchung.

1) Man vgl. z. B. das betr. Kapitel in Kirchhoffs Mechanik.

(Eingegangen am 3. April 1918.)

## Über eine Beziehung der Gravitationskonstante zu den Grundgrößen der Elektrizitätstheorie.

Von Arthur Haas.

Die wenigen dimensionslosen universellen Konstanten, die die Physik aufweist, sind deshalb von besonderer Bedeutung, weil sie von unseren Maßeinheiten völlig unabhängige, reine Zahlenverhältnisse darstellen. Unter ihnen sind namentlich zwei wichtig. Die eine Zahl, die $Z_1$ genannt werde, ist das Verhältnis zwischen der spezifischen Ladung negativer Elektronen, also zwischen dem (elektrostatisch gemessenen) Quotienten $e/m$ und der Quadratwurzel aus der Gravitationskonstante ($\varkappa$). Die zweite Zahl, die mit $Z_2$ bezeichnet werde, ist das Verhältnis der Masse des Wasserstoffatomkernes ($M$) zu der Masse des negativen Elektrons ($m$). Es ist also

$$Z_1 = \frac{e}{m\sqrt{\varkappa}} \quad (1)$$

und

$$Z_2 = \frac{M}{m}. \quad (2)$$

($Z_2$ ist um Eins, also nur unwesentlich kleiner als das Verhältnis $m_H/m$, wenn $m_H$ die Masse des Wasserstoffatoms ist.)

Zwischen den beiden Zahlen $Z_1$ und $Z_2$ scheint nun eine einfache Zahlenbeziehung in der Form der Gleichung zu bestehen

$$Z_1 = \pi^{\sqrt{Z_2}}. \quad (3)$$

Setzt man mit Flamm[1])

$$\frac{e}{m} = 5{,}304 \cdot 10^{17}\ \mathrm{cm}^{3/2} \mathrm{g}^{-1/2} \mathrm{sec}^{-1}, \quad (4)$$

und mit Richarz und Krigar-Menzel[2])

$$\varkappa = 6{,}685 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}^3 \mathrm{g}^{-1} \mathrm{sec}^{-2}, \quad (5)$$

so wird, nach Gl. (3) berechnet,

$$\frac{M}{m} = 1837{,}7 \quad (6)$$

und somit (auf eine ganze Zahl abgerundet)

$$\frac{m_H}{m} = 1839. \quad (7)$$

Dieser Wert unterscheidet sich um weniger als $^1/_2$ Proz. von den Werten, die auf Grund experimenteller Forschungsergebnisse für das Verhältnis $m_H/m$ angegeben werden: 1844 bei P. Epstein[3]), 1846,9 (auf Grund der strittigen Millikanschen $e$-Bestimmungen) bei Flamm[4]) und 1843, welcher Wert sich auf Grund des von Paschen[5]) für $e/m$ gefundenen Wertes ($1{,}7649 \cdot 10^7$ mal Lichtgeschwindigkeit) nach der Methode von Flamm ergibt[6]).

Löst man die Gl. (3) nach der Gravitationskonstante auf, so findet man

$$\varkappa = \left(\frac{e}{m}\right)^2 \pi^{-2\sqrt{\frac{M}{m}}}. \quad (8)$$

Mittels dieser Gleichung wäre die Gravitationskonstante durch die Grundgrößen der Elektrizitätstheorie ausgedrückt, nämlich durch die beiden Quotienten $e/m$ und $M/m$, während das elektrische Elementarquantum selbst in der Gleichung nicht auftritt[7]).

1) Diese Zeitschr. **18**, 515, 1917.

2) Wied. Ann. **66**, 190, 1898. — Der in Riecke's Lehrbuch in sämtlichen Auflagen angegebene Wert von $6{,}658 \cdot 10^{-8}$ ist offenbar auf einen Druckfehler zurückzuführen, der durch Verwechslung zweier Ziffern herbeigeführt wurde.

3) Die Naturwissenschaften **6**, 238, 1918 (Planck-Heft).

4) l. c.

5) Ann. d. Phys. **50**, 936, 1916.

6) Mit dem Werte von $e/m$ ändert sich allerdings auch die linke Seite der Gl (3). Doch wird dadurch das Ergebnis der Berechnung von $Z_2$ aus dieser Gleichung nicht merklich beeinflußt.

7) Die physikalische Bedeutung der Zahl $Z_1$ besteht darin, daß die elektrische Kraft zwischen den Ladungen zweier negativer Elektronen $Z_1{}^2$mal so groß ist wie die Gravitation zwischen ihren Massen.

Leipzig, am 9. Juli 1918.

(Eingegangen 12. Juli 1918).

# ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

## Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen.

Von W. Voigt.

### Spezieller Teil I [1].

### I. Klasse. Achsenloses Raumgitter.

Die Bausteine oder Atome liegen, parallel orientiert, in den Knotenpunkten eines Raumgitters mit den beliebig gegeneinander geneigten und beliebig langen Grundstrecken $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. Die

Fig. 1. (Nr. 1.)

parallelepipedischen Zellen mit den Kanten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ (Fig. 1) stellen das Elementargebiet dar, durch dessen Wiederholung der Strukturbau entsteht. Das Zentrum der Symmetrie, das, wie jedes regelmäßige Raumgitter, so auch die eben beschriebene Zelle rein geometrisch besitzt, ist durch die allgemein azentrisch zu denkende Konfiguration der in den Gitterpunkten liegenden Bausteine oder Atome aufgehoben.

#### Nr. 1. Kein Symmetrieelement.

Formel: $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$. (Sch. $\mathfrak{C}_1$.) [2]

Nr. $1\alpha$. Spiegelpunkt
in beliebiger Lage; somit also zwei sich spiegelbildlich entsprechende Arten von Bausteinen in spiegelbildlichen Lagen. (Sch. $\mathfrak{C}_1$.)

Diese beiden Typen entsprechen den kristallographischen Symmetrien $\{O\}$ und $\{C\}$.

Von dem allgemeinen Typ Nr. 1 sind zwei Spezialisierungen von Bedeutung.

#### Gerades rhomboidisches Raumgitter; $\mathfrak{c} \parallel [\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}]$.

Die geometrische Form hat eine zweizählige Drehachse $\mathfrak{A}'$ parallel $\mathfrak{c}$ (Fig. 2).

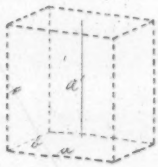


Fig. 2. (Nr. 1′.)

Nr. $1'\beta$. Spiegelebene
a) normal zu $\mathfrak{A}'$, in sonst beliebiger Lage. (Sch. $\mathfrak{C}_s^1$.)

Nr. $1'\gamma$. Gleitspiegelebene
a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$. (Sch. $\mathfrak{C}_s^2$.)

#### Schiefes rhombisches Raumgitter; $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{c} \perp \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$.

Die geometrische Form hat eine zweizählige Drehachse $\mathfrak{A}''$ normal zur Ebene durch $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \mathfrak{e}$ (Fig. 3).

Fig. 3. (Nr. 1″.)

Nr. $1''\beta$. Spiegelebene
a) normal zu $\mathfrak{A}''$, sonst beliebig gelegen. (Sch. $\mathfrak{C}_s^3$.)

Nr. $1''\gamma$. Gleitspiegelebene
a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{e} = \frac{1}{2}(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$. (Sch. $\mathfrak{C}_s^4$.)

Die Typen unter 1′ und 1″ entsprechen sämtlich der kristallographischen Symmetrie $\{E\}$.

---

1) Vorbemerkung. Nachdem in dem ersten, allgemeinen Teil die Grundvorstellungen, Definitionen und Symbole der Strukturtheorie auseinandergesetzt worden sind, bringt der zweite, spezielle Teil zunächst die systematische Aufzählung und Beschreibung der durch die Theorie gelieferten Strukturtypen, sodann die Vergleichung einiger beobachteten Strukturen mit den Ergebnissen der Theorie. Die Typen sind in Klassen geordnet, die durch die Art der bei ihnen auftretenden Dreh- und Schraubenachsen charakterisiert werden.

2) (Sch. ...) bezeichnet das Schönflies'sche Symbol des Typs.

## II. Klasse. Zweizählige Hauptachsen.

Parallele zweizählige Dreh- oder Schraubenachsen treten für sich allein nach S. 242 jederzeit in vier Scharen von im allgemeinen untereinander verschiedenen Arten auf, die mit $\mathfrak{A}$ (2,p), $\mathfrak{B}$ (2,q), $\mathfrak{C}$ (2,r), $\mathfrak{D}$ (2,s) bezeichnet werden sollen. Wir denken sie vertikal gestellt und wählen eine horizontale Ebene zur Grund- oder Nullfläche. Das System der Schnittpunkte der Achsen mit der Ebene bildet ein rhomboidisches Netz, von dem jede Masche in den vier Ecken Schnittpunkte mit vier verschiedenen Achsen trägt. (Siehe Fig. 4, in der die Zweizähligkeit durch eine kurze gerade Strecke [zweispitzigen Stern] durch jeden Netzpunkt angedeutet ist.) Um die verschiedenen Achsen gleicher Art voneinander unterscheiden zu können, sind ihre Symbole in der Figur für Achsen derselben Horizontalreihe durch obere, für diejenigen verschiedener Reihen durch untere Indizes ausgezeichnet.

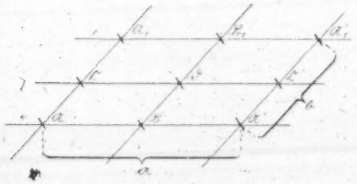


Fig. 4.

Die Anordnung der Achsen charakterisieren wir durch die Abstände $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ einer Achse (z. B. $\mathfrak{A}$) von den beiden ihr zunächst benachbarten Achsen gleicher Art; $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$ sind dann die Seiten einer Masche des oben erwähnten rhomboidischen Netzes. Außer den Grundstrecken $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ dient zur Charakteristik der Struktur noch deren „Periode“ $\mathfrak{c}$ parallel den Vertikalachsen $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{D}$, d. h. der Abstand holonomer Horizontalebenen oder aber die Dicke der untereinander identischen Schichten, in die das ganze Atomsystem zerlegt werden kann. Das rhomboidische Prisma mit den Kanten $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ ist ein Elementargebiet, dessen Wiederholung das ganze System bildet. Allerdings gilt das letztere hier nicht in demselben einfachen Sinne, wie bei dem entsprechenden Parallelepiped der ersten Klasse.

Eine zweizählige Dreh- oder Schraubenachse, z. B. $\mathfrak{A}$, liefert durch ihre Deckbewegung innerhalb der Periode $\mathfrak{c}$ zu einem Ausgangspunkt $P$ nur einen einzigen weiteren Punkt $P'$ in einer um 180° gedrehten Meridianebene und im gleichen Abstand von $\mathfrak{A}$ wie $P$. Im Falle der Drehachse liegen beide Punkte in gleicher Höhe, im Falle der Schraubenachse in um $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ verschiedenen. Diese beiden Arten von Atompaaren, die als diametral und verschränkt-diametral unterschieden werden mögen, bilden die Elemente, aus denen alle nur auf zweizähligen Achsen beruhenden Anordnungen sich aufbauen. Für den Fall, daß das eine Atom in einer Nullebene liegt, sind sie in der früher festgesetzten Weise durch Fig. 5′ und 5″ veranschaulicht.

Fig. 5′.

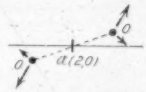
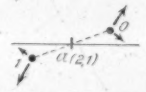



Fig. 5″.




Da alle Achsen $\mathfrak{A}$ durch die Drehungen und Schraubungen von 180° um eine kleinere oder größere Zahl der übrigen Achsen ineinander übergeführt werden können, so liegen die Punktpaare $PP'$ für alle Achsen $\mathfrak{A}$ in parallelen Meridianen; sie können aber in um $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ verschiedenen Höhen liegen, da eine zweizählige Schraubenachse bei dem Drehungswinkel 180° eine Hebung um $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ bewirkt[1]). Daraus folgt, daß die um zwei benachbarte Achsen $\mathfrak{A}$ geordneten Punkte, oder kurz diese Achsen selbst entweder durch eine Schiebung $\mathfrak{a}$ bzw. $\mathfrak{b}$ oder durch eine solche $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ bzw. $\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ zur Deckung gebracht werden können. (Im letzteren Falle sind dann $2\mathfrak{a}$ und $2\mathfrak{b}$ Deckschiebungen.)

Aus dem Gesagten folgt zugleich, warum, wie oben bemerkt, das Parallelepiped mit den Kanten $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ nicht in demselben einfachen Sinne ein Elementarbereich der Struktur ist, wie bei der I. Klasse. Sind nämlich die den vier Achsen $\mathfrak{A}$ des genannten Parallelepipedes zugehörigen Punktpaare $PP'$ nicht sämtlich in gleicher Höhe, so kann man dies Bereich nicht durch eine bloße Schiebung $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ mit dem Nachbarbereich zur Deckung bringen, sondern muß dazu eine kombinierte Schiebung $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ verwenden.

Ist allen Achsen einer Art, z. B. $\mathfrak{A}$, je ein Punktpaar $P$, $P'$ zugeordnet, so muß sich dies System entsprechend auch auf jede andere Achsenart, z. B. $\mathfrak{B}$, beziehen lassen, wobei diese nicht notwendig dieselbe (Dreh- oder Schrauben-) Natur zu haben brauchten, wie $\mathfrak{A}$.

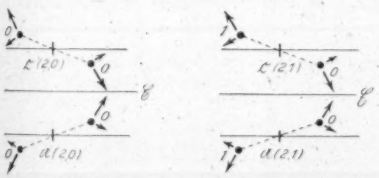
Zur Veranschaulichung der Wirkung, welche

1) Hierbei ist berücksichtigt, daß, wegen der Periodizität um $\mathfrak{c}$, Hebungen um ein ganzes Vielfaches von $\mathfrak{c}$ bezüglich der Anordnung der Punkte $PP'$ nicht wirksam werden.

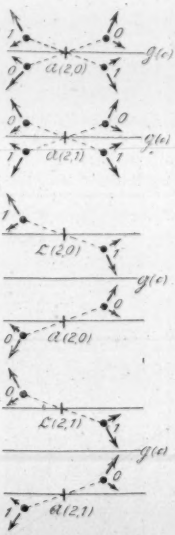
die Kombination einer Spiegelebene, Gleitspiegelebene und Spiegelachse mit einer zweizähligen Dreh- oder Schraubenachse liefert, sei folgendes dargelegt.

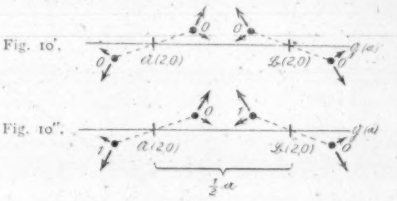
Eine durch eine Achse $\mathfrak{A}$ hindurchgehende Spiegelebene $\mathfrak{E}$ ergänzt die Konfigurationen Fig. 5′ und 5″ zu den in Fig. 6′ und 6″ wieder-

gegebenen. Eine an $\mathfrak{A}$ vorbeigehende Ebene $\mathfrak{E}$ ergibt die Konfigurationen Fig. 7′ und 7″.




Die Fig. 8′ und 8″, 9′ und 9″ stellen das Entsprechende für Gleitspiegelebenen $\mathfrak{G}$ mit dem vertikalen Gleitbetrag $\frac{1}{2}$ c dar, wobei wieder benutzt ist, daß eine Höhe über der Grundebene, die um $h$ größer ist, als c, einer Lage in der Höhe $h$ selbst äquivalent ist. Fig. 10′ und 10″ endlich veranschaulichen die Wirkung einer




durch $\mathfrak{A}$ gehenden Gleitspiegelebene mit horizontaler Gleitung $\frac{1}{2}$ a. Wo durch die Deckoperation die Achse $\mathfrak{A}$ nicht mit sich zur Deckung kommt, muß sie nach S. 244 nachher in eine andere Achse fallen, wie das in den Fig. 7, 9 und 10 durch Einzeichnung der Buchstaben $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ angedeutet ist. Nach dem hier in einem einfachen Falle Ausgeführten läßt sich das in komplizierteren Fällen eintretende leicht beurteilen.

Die Wirkung einer in eine Drehachse fallenden Spiegelachse $\mathfrak{S}$ auf ein Paar des Typs Fig. 5′ veranschaulicht Fig. 11. In allen diesen Fällen

treten den ursprünglichen spiegelbildlich entsprechende Atome auf.

## Abteilung A. Ohne Querachsen.

Nr. 2. **Zweizähliges Säulensystem.**

Formel: $\mathfrak{A}(2,0)$, a, b, c. Abhängige Achsen $\mathfrak{B}(2,0)$, $\mathfrak{C}(2,0)$, $\mathfrak{D}(2,0)$ (Fig. 12).

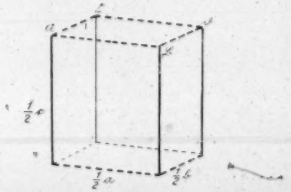



Fig. 12. (Nr. 2.)

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametrale Atompaare vom Typ Fig. 5′, und zwar innerhalb einer Periode c sämtlich in derselben Höhe[1]). (Sch. $\mathfrak{C}^1_{v}$.)

Nr. $2\alpha$. Spiegelpunkt

a) auf einer Achse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{D}$ in sonst beliebiger Lage. (Sch. $\mathfrak{C}^1_{2,h}$),

b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei ungleichartigen Achsen. (Sch. $\mathfrak{C}^1_{2,h}$).

Wieder kommen spezielle Gestaltungen in Betracht, welche allein die Einfügung einer Spiegelebene $\mathfrak{E}$, Gleitspiegelebene $\mathfrak{G}$ und auch Spiegelachse $\mathfrak{S}$ gestatten.

**Erstes rechteckiges Achsennetz.** $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$ (Fig. 13).

Da die Deckoperationen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ keine neuen Achsen zu den alten $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{D}$ hinzubringen dürfen, sind nur Stellungen zulässig, die ein Paar benachbarter Achsen (z. B. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$) enthalten oder mitten zwischen zwei derartige Paare

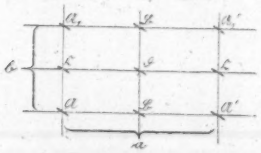


Fig. 13.

hineinfallen. Zur Illustration sollen hier alle möglichen so zu gewinnenden Typen aufgeführt werden, wenn auch mehrere — wie leicht festzustellen — einander gleichartig sind.

Nr. $2'\beta$. Spiegelebene

a) in der Ebene zweier benachbarter ungleicher Achsen z. B. $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ oder $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$. (Sch. $\mathfrak{C}^1_{2,v}$),

b) mitten zwischen zwei nächsten derartigen Ebenen, z. B. $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ und $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}$ oder $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$. (Sch. $\mathfrak{C}^4_{2,v}$.)

Nr. $2'\gamma$. Gleitspiegelebene

a) in einer Ebene benachbarter ungleicher Achsen, z. B. $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ oder $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$, Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$. (Sch. $\mathfrak{C}^3_{2,v}$.)

Die analoge Lage bei Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$ gibt mit Nr. $2'\beta$b Übereinstimmendes.

b) in derselben Ebene; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$ oder $\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$. (Sch. $\mathfrak{C}^9_{2,v}$),

c) in einer Ebene mitten zwischen zwei nächsten Achsenebenen $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ und $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}$ oder $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$. (Sch. $\mathfrak{C}^8_{2,v}$),

d) ebenso mit Gleitbetrag $\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ oder $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$. (Sch. $\mathfrak{C}^{10}_{2,v}$.)

Der Fall des Gleitbetrages $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ stimmt mit Nr. $2'\gamma$b überein.

**Erstes rhombisches Achsennetz.** $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. (Fig. 14.) Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ können hier nur

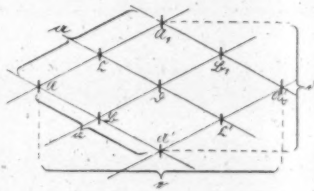


Fig. 14.

in eine Diagonalebene fallen. Wieder sind alle möglichen Fälle aufgeführt, obgleich einander zum Teil gleichwertig.

Nr. $2''\beta$. Spiegelebene

a) in einer Diagonalebene $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$ oder $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$. (Sch. $\mathfrak{C}^{11}_{2,v}$.)

Nr. $2''\gamma$. Gleitspiegelebene

a) in einer Diagonalebene $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$ oder $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$ mit Gleitbeträgen $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$, $\frac{1}{2}(\mathfrak{c}+\mathfrak{c})$ oder $\frac{1}{2}(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})$ bei $\mathfrak{c}=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d}=\mathfrak{a}-\mathfrak{b}$. (Sch. $\mathfrak{C}^{13}_{2,v}$.) Der Fall der Gleitung $\frac{1}{2}\mathfrak{e}$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{d}$ ist mit Nr. $2''\beta$a äquivalent.

**Quadratisches Achsennetz.** $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$.

Nr. $2'''\delta$. Spiegelachse

a) in einer der Vertikalachsen $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{D}$; die begleitende horizontale Spiegelebene in beliebiger Stellung. (Sch. $\mathfrak{S}^1_4$.)

Nr. 3. **Zweipunktschraubensystem.**

Formel: $\mathfrak{A}(2,1)$, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,1)$. (Fig. 15).

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametral verschränkte Atompaare des Typs Fig. 5″, die innerhalb

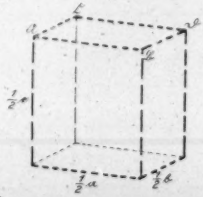


Fig. 15. (Nr. 3.)

[1]) Gemäß dem S. 247 allgemein Festgesetzten werden in den perspektivischen Figuren Drehachsen durch ausgezogene (——), Schraubenachsen durch gestrichelte (— — —) Linien dargestellt.

einer Periode $\mathfrak{c}$ sämtlich in derselben Höhe liegen. (Sch. $\mathfrak{C}_{2}^{1}$.)

Nr. $3\alpha$. Spiegelpunkt

a) auf irgendeiner Achse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{D}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,h}^{2}$),

b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei benachbarten verschiedenen Achsen. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,h}^{3}$.)

Auch hier gibt es spezielle Fälle, die wie diejenigen von Nr. 2 behandelt werden sollen.

**Erstes rechteckiges Achsennetz.** $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$. (Fig. 13.)

Nr. $3'\beta$. Spiegelebene

a) in der Ebene zweier benachbarter Achsen, z. B. $\mathfrak{AC}$ oder $\mathfrak{AB}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{4}$),

b) um $\frac{1}{4}\mathfrak{a}$ oder $\frac{1}{4}\mathfrak{b}$ aus diesen Stellungen gerückt. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{7}$.)

Nr. $3'\gamma$. Gleitspiegelebene

a) in einer Ebene $\overline{\mathfrak{AC}}$ oder $\overline{\mathfrak{AB}}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{5}$.) Der Fall der Gleitung $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ ist mit Nr. $3'\beta\mathfrak{a}$, der $\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ oder $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$ mit Nr. $3'\beta\mathfrak{b}$ äquivalent,

b) in einer Ebene mitten zwischen zwei nächsten Achsenebenen $\overline{\mathfrak{AC}}$ und $\overline{\mathfrak{BD}}$ oder $\overline{\mathfrak{AB}}$ und $\overline{\mathfrak{CD}}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$, sowie $\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ oder $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{6}$.) Der Fall der Gleitung $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ ist mit Nr. $3'\gamma\mathfrak{a}$ äquivalent.

**Erstes rhombisches Achsennetz.** $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. (Fig. 14.)

Nr. $3''\beta$. Spiegelebene

a) in einer Diagonalebene $\overline{\mathfrak{AD}}$ oder $\overline{\mathfrak{BC}}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{12}$.)

Die Fälle ebenso gelegener Gleitspiegelebenen mit dem Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ weiter, $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ oder $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$, endlich $\frac{1}{2}(\mathfrak{c}+\mathfrak{c})$ oder $\frac{1}{2}(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})$ sind dem Fall Nr. $3''\beta\mathfrak{a}$ äquivalent.

### Nr. 4. Klinorhombisches Säulensystem.

Formel: $\mathfrak{A}\,(2,0)\;\mathfrak{a}, \mathfrak{b}+\frac{1}{2}\mathfrak{c}, \mathfrak{c}$. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}\,(2,0)$, $\mathfrak{C}\,(2,1)$, $\mathfrak{D}\,(2,1)$. (Fig. 16.)

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametrale Polpaare des Typs Fig. $5'$, die innerhalb einer Periode $\mathfrak{c}$ für

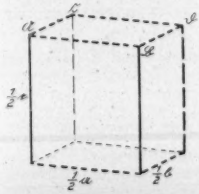



Fig. 16. (Nr. 4.)

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ in der Höhe 0, für $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1'$ in der Höhe $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ liegen. (Sch. $\mathfrak{C}_{2}^{1}$.)

Nr. $4\alpha$. Spiegelpunkt

a) auf einer der Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{D}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,h}^{3}$),

b) auf einer Geraden mitten zwischen zwei verschiedenen Achsen beliebig gelegen. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,h}^{5}$.)

Das Problem der Einführung von Spiegel- und Gleitspiegelebene kompliziert sich hier gegenüber den unter Nr. 2 und 3 entstandenen durch die Verschiedenartigkeit der Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ einer-, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ andererseits. Die Spiegelungen dürfen ja nicht verschiedenartige Achsen zur Deckung bringen.

**Erstes rechteckiges Achsennetz,** $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$. (Fig. 13.)

Das Grundrechteck mit den Seiten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ trägt auf den zu $\mathfrak{a}$ parallelen Seiten nur Drehachsen, auf der zu $\mathfrak{a}$ parallelen Mittellinie nur Schraubenachsen.

Nr. $4'\beta$. Spiegelebene

a) in einer Ebene benachbarter ungleichartiger Achsen, z. B. $\mathfrak{AC}$ oder $\mathfrak{AB}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{14}$),

b) in einer Ebene mitten zwischen zwei dergleichen. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{16}$.)

Nr. $4'\gamma$. Gleitspiegelebene

a) in einer Ebene wie $\mathfrak{AC}$ oder $\mathfrak{AB}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{15}$),

b) in einer Ebene $\overline{\mathfrak{AB}}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$. (Sch. $\mathfrak{C}_{2,v}^{17}$.)

Dieselbe Lage mit dem Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$ gibt zu Nr. $4'\beta\mathfrak{b}$ Äquivalentes. Die Lage in einer Ebene mitten zwischen $\overline{\mathfrak{AC}}$ und $\overline{\mathfrak{BD}}$ bei Gleitung $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ stimmt im Effekt mit Nr. $4'\gamma\mathfrak{b}$ überein.

### Zweites rechteckiges Achsennetz.
$\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \perp \mathfrak{b}$. (Fig. 17.)

Das Grundrechteck mit den Seiten $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} = \mathfrak{b}$ trägt in seinen Ecken Dreh-, in seinen Seitenmitten Schraubenachsen.

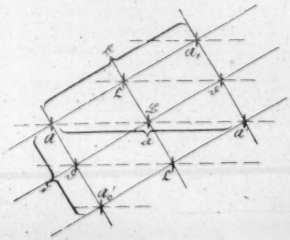



Fig. 17.

Nr. $4''\beta$. Spiegelebene

a) in einer Ebene $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ oder $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$. (Sch. $\mathfrak{C}^{18}_{2,v}$)

Nr. $4''\gamma$. Gleitspiegelebene

a) in $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ oder $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$, Gleitbetrag $\mathfrak{b} + \frac{1}{4}\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{d} + \frac{1}{4}\mathfrak{c}$. (Sch. $\mathfrak{C}^{19}_{2,v}$)

### Zweites rhombisches Achsennetz.

$\mathfrak{b} - \frac{1}{2}\mathfrak{a} \perp \mathfrak{a}$. (Fig. 18.)

Der Grundrhombus hat $\mathfrak{a}$ zur Diagonale. Die Verteilung der Dreh- und Schraubenachsen ist symmetrisch zu den beiden Diagonalen,

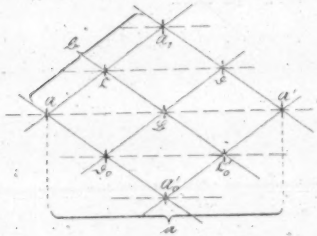


Fig. 18.

welche die einzigen möglichen Stellungen von Spiegel- und Gleitspiegelebene bezeichnen.

Nr. $4'''\beta$. Spiegelebene

a) in einer der beiden durch eine Achse $\mathfrak{A}$ gehenden Diagonalebenen. (Sch. $\mathfrak{C}^{20}_{2,v}$),

b) in einer zu $\mathfrak{a}$ normalen Diagonalebene $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$. (Sch. $\mathfrak{C}^{22}_{2,v}$)

N. $4'''\gamma$. Gleitspiegelebene

a) in einer der beiden durch eine Achse $\mathfrak{A}$ gehenden Diagonalebenen, Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$. (Sch. $\mathfrak{C}^{21}_{2,v}$)

Die Lage in der zu $\mathfrak{a}$ parallelen Diagonalebene $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ mit dem Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$ führt auf den Fall Nr. $4'''\beta$b.

### Quadratisches Achsennetz. $|\mathfrak{a}| = |\mathfrak{b}|$, $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$.

Nr. $4''''\delta$. Spiegelachse

a) in einer der Achsen $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$; die begleitende Spiegelebene beliebig. (Sch. $\mathfrak{S}^{1}_{v}$)

Von den Anordnungen der Abteilung II A haben die kristallographische Symmetrie $\{A^2_x\}$ die Typen Nr. 2, 3, 4, die Symmetrie $\{CA^2_x\}$ die Typen Nr. $2\alpha$, $3\alpha$, $4\alpha$, die Symmetrie $\{S_x\}$ die Typen Nr. $2'''\delta$ und Nr. $4''''\delta$, endlich die Symmetrie $\{A^2_x, E_x\}$ alle übrigen Typen.

## Abteilung B. Mit Querachsen.

Querachsen sind mit dem S. 332 und Fig. 4 dargestellten System von möglichen parallelen zweizähligen Achsen nur dann vereinbar, wenn das durch die vier Achsenarten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in der Grundebene bestimmte Rhomboid die speziellen Formen des Rechtecks oder des Rhombus besitzt; denn nur in diesem Falle führt die Umklappung um eine (geeignet gewählte) Querachse zu keinen neuen Achsen. Dabei können je nach Art und Lage der Querachse die drei Fälle eintreten, daß bei der Umklappung 1. jede der vier Achsenarten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in sich übergeführt wird, 2. zwei der Achsenarten in sich selbst übergeführt werden, die beiden andern sich austauschen, 3. alle vier Achsen sich paarweise austauschen. Der letzte Fall zerfällt dabei in zwei Unterfälle 3′ und 3″, je nachdem der Austausch zwischen benachbarten oder einander diagonal gegenüberliegenden Achsen stattfindet. In den Fällen 1, 3 ist das Rhomboid $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ ein Rechteck, in 2 ein Rhombus. Von den im folgenden besprochenen Anordnungen fallen Nr. 5 bis 8 unter das erste, Nr. 9 bis 11 unter das zweite, Nr. 12 und 13 unter das dritte Schema. —

Über die Konfiguration der auf eine zweizählige Achse $\mathfrak{A}$ zu beziehenden Bausteine oder Atome bei Vorhandensein einer Querdrehachse $\mathfrak{Q}(2,0)$ läßt sich allgemein sagen, daß, falls $\mathfrak{Q}$ durch ein $\mathfrak{A}(2,0)$ oder $\mathfrak{A}(2,1)$ hindurchgeht, aus den diametralen und verschränkt diametralen Typen Fig. 5′ und 5″ die in Fig. 19′ und 19″ dargestellten entstehen, dagegen, falls dies nicht

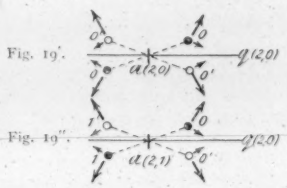



Fig. 19.

stattfindet, die durch Fig. 20′ und 20″ wiedergegebenen. Liegt die Querachse um $h$ über der 0-Grundfläche, so liegen die mit 0′ und 1′ bezeichneten Punkte um $2h$ höher als 0 und 1. Dabei ist in den Figuren wieder die Periodizität der ganzen Anordnung um $\mathfrak{c}$ berücksichtigt. Die Wirkung einer durch $\mathfrak{A}(2,1)$ gehenden bzw. nicht hindurch gehenden Schraubenachse $\mathfrak{P}(2,1)$ mit der Ganghöhe $\mathfrak{a}$ ist in den Fig. 21′ und 21″ wiedergegeben. $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ sind dabei stets die Achsen, mit denen $\mathfrak{A}$ durch die bez. Deckbewegung zusammenfällt.

Während bei vertikalen Schraubenachsen die maßgebende Deckschiebung ein für allemal $= \mathfrak{c}$ ist, kommen für Querschraubenachsen verschie-

Fig. 20'.

Fig. 20''.

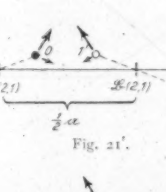




Fig. 21'.

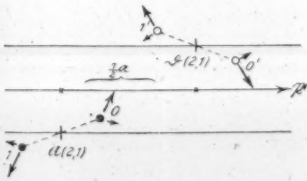


Fig. 21''.

dene Falle vor, je nachdem die Achse parallel zu $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{d} = \mathfrak{a} - \mathfrak{b}$, $\mathfrak{e} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ liegt, weil die Größe der Deckschiebung parallel diesen Richtungen nicht stets dieselbe ist. Diese Größe ist nun aber aus der Strukturformel sofort zu erschließen. Sind darin $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als Deckschiebung angegeben, so haben auch $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$ diese Eigenschaft. Ist $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ oder $\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ (schiefe) Deckschiebung, dann hat die Deckschiebung parallel $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ den Wert $2\mathfrak{a}$ oder $2\mathfrak{b}$. Sind $\mathfrak{a} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{b} + \frac{1}{2}\mathfrak{c}$ zugleich Deckschiebungen, so gilt Gleiches für $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{e}$.

### Nr. 5. System der rechteckigen Säule.

Rechteckige Grundfläche: $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$. (Fig. 13.)

Formel: $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}}(2,0)$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

$\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}}$ geht durch benachbarte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und projiziert sich auf $\mathfrak{a}$. Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametrale Atomsysteme Fig. 19' in derselben Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,0)$, $\mathfrak{C}(2,0)$, $\mathfrak{D}(2,0)$, ferner zu $\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}}$ parallele und normale Drehachsen, die mit diesem die Kanten rechtwinkliger Zellen mit den Seiten $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ bilden (Fig. 22). (Sch. $\mathfrak{B}^1$.)

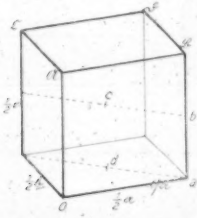


Fig. 22. (Nr. 5.)

Nr. 5$\alpha$. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt dreier Drehachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^1$),
b) auf einer Achse mitten zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{B}_h^2$),
c) im Mittelpunkt eine der Zellen mit den Kanten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{L}$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^3$),
d) im Mittelpunkt einer Begrenzungsfläche dieser Zelle. (Sch. $\mathfrak{B}_h^4$.)

### Quadratische Spezialisierung. $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Nr. 5'$\beta$. Spiegelebene

a) durch zwei sich diametral gegenüberliegende Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. (Sch. $\mathfrak{B}_d^1$),

Nr. 5''$\gamma$. Gleitspiegelebene

a) ebenso gelegen, Gleitbetrag $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$. (Sch. $\mathfrak{B}_d^2$.)

### Nr. 6. Zusammengesetztes rechteckiges Zweipunktschraubensystem.

Rechteckige Grundfläche: $\mathfrak{a} \perp \mathfrak{b}$. (Fig. 13).

Formel: $\mathfrak{A}(2,1)$, $\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}}(2,0)$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$.

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen verschränkte Atomsysteme der Form Fig. 19'' in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$. $\mathfrak{D}(2,1)$.

Außerdem zu $\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}}(2,0)$ parallele Achsen in den Kanten einer Zelle mit Seiten $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{b}$, $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ und zu $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}$ normale $\mathfrak{L}_{\mathfrak{b}}$ gegeneinander analog gelegen, aber um $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ vertikal gegen die $\mathfrak{L}_{\mathfrak{a}}$ verschoben (Fig. 23). (Sch. $\mathfrak{B}^2$.)

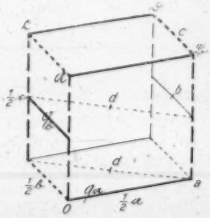


Fig. 23 (Nr. 6).

Nr. 6$\alpha$. Spiegelpunkt

a) auf einer Schraubenachse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ oder $\mathfrak{D}$ im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathfrak{Q}_a$ oder $\mathfrak{Q}_b$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^5$),

b) auf einer Querachse mitten zwischen zwei Schraubenachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^7$),

c) im Mittelpunkt eines von zwei Schrauben- und zwei Querachsen begrenzten (vertikalen) Rechteckes. (Sch. $\mathfrak{B}_h^8$),

d) im Mittelpunkt einer rechteckigen Zelle von den Seiten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}c$, die vier Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ und vier Achsen $\mathfrak{Q}_a$ oder $\mathfrak{Q}_b$ zu Kanten hat. (Sch. $\mathfrak{B}_h^6$.)

## Nr. 7. System der Rhombensäule.

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$. (Fig. 13.)
Formel: $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{Q}_a(2,0)$, $a$, $b + \frac{1}{2}c$, $c$.

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametrale Atomsysteme vom Typ Fig. 19′, und zwar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1'$ je in gleicher, aber gegeneinander um $\frac{1}{2}c$ verschiedener Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,0)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,1)$; ferner zu $\mathfrak{Q}_a$ parallele und gleichartige Drehachsen in den relativen Lagen

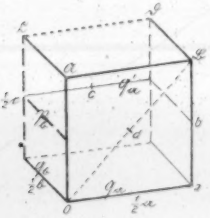


Fig. 24. (Nr. 7.)

$\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c$, $b$, $b + \frac{1}{2}c$, sowie zu $\mathfrak{Q}_b$ normale $\mathfrak{Q}_a(2,0)$, welche die Vertikalachsen $\mathfrak{A}$ bis $\mathfrak{D}$ in denselben Punkten schneiden, wie die $\mathfrak{Q}_a$; endlich zu $b$ parallele Querschraubenachsen $\mathfrak{P}_b(2,1)$ mitten zwischen zwei übereinanderliegenden $\mathfrak{Q}_b$ (Fig. 24.) (Sch. $\mathfrak{B}^6$.).

Nr. 7$\alpha$. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt zweier Drehachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{19}$),

b) auf einer Achse $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$ mitten zwischen zwei derartigen Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{21}$),

c) auf einer Querachse $\mathfrak{Q}_a'$ mitten zwischen zwei Vertikalschraubenachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{20}$),

d) im Mittelpunkt einer der vertikalen Rechtecke zwischen zwei vertikalen und zwei Querdrehachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{22}$.)

### Quadratische Spezialisierung. $a = b$.

Nr. 7′$\beta$. Spiegelebene

a) durch zwei gegenüberliegende Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$. (Sch. $\mathfrak{B}_d^5$.)

Nr. 7′$\gamma$. Gleitspiegelebene

a) durch zwei gegenüberliegende Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathfrak{B}_d^6$),

b) mitten zwischen zwei parallelen, bzw. $\mathfrak{A}\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ enthaltenden Ebenen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c = \frac{1}{2}(a + b)$, (Sch. $\mathfrak{B}_d^7$),

c) Lage wie bei b; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(c + c)$. (Sch. $\mathfrak{B}_d^8$).

## Nr. 8. Rhombenoktaedersystem.

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$; (Fig. 13) Formel: $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{Q}_a(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, $c$.

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametrale Atomsysteme vom Typ Fig. 19′, und zwar $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1'$ und $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_1$ je in gleicher, aber gegeneinander um $\frac{1}{2}c$ verschiedener Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,0)$. Zu $\mathfrak{Q}_a$ sind gleichartige Achsen parallel gelegen in den Abständen $\frac{1}{2}c$, $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c, b, b + \frac{1}{2}c$, außerdem parallele Schraubenachsen $\mathfrak{P}_a(2,1)$ in Abständen $\frac{1}{4}c$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}(b + c)$. Ihnen entsprechen Querachsen $\mathfrak{Q}_b(2,0)$ und $\mathfrak{P}_b(2,1)$, die durch Drehung um 90° aus den vorigen hervorgehen (Fig. 25). (Sch. $\mathfrak{B}^7$.)

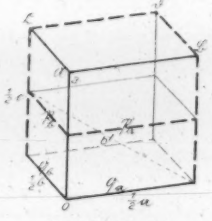


Fig. 25. (Nr. 8.)

Nr. 8$\alpha$. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt dreier Drehachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{23}$),

b) im Mittelpunkt einer rechteckigen Zelle von den Kanten $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{4}c$, von deren gegenüberliegenden Ecken ein Paar zugleich Schnittpunkte von je drei Drehachsen sind. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{24}$.)

### Quadratische Spezialisierung. $a = b$.

Nr. 8′$\beta$. Spiegelebene

a) durch zwei gegenüberliegende Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. (Sch. $\mathfrak{B}_d^9$.)

Nr. 8′$\gamma$. Gleitspiegelebene

a) wie vorstehend; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathfrak{B}_d^{10}$).

Nr. 9. **Zusammengesetztes rhombisches Zweipunktschraubensystem.**

Rhombische Grundfläche: $|a| = |b|$; $a + b = c$ $a - b = b$; (Fig. 14.) Formel: $\mathfrak{A}(2,1)$, $\mathfrak{S}_c(2,0)$, $a, b, c$; die Querachse liegt in der Diagonalebene $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$.

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen in gleichen Höhen verschränkte Atomsysteme vom Typ Fig. 19″. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,1)$. Zu $\mathfrak{S}_c(2,0)$ parallel liegt eine gleichartige Achse im Abstand $\frac{1}{2}c$; vier parallele Schraubenachsen $\mathfrak{P}_c(2,1)$ befinden sich in den Abständen $\pm\frac{1}{4}b$ und $\frac{1}{2}c \pm \frac{1}{4}b$.

Diesem System der $\mathfrak{S}_c$ und $\mathfrak{P}_c$ entspricht ein System der $\mathfrak{S}_b$ und $\mathfrak{P}_b$ in um 90° bzw. $\mathfrak{A}$ gedrehter und um $\frac{1}{4}c$ gehobner Lage (Fig. 26). (Sch. $\mathfrak{B}^5$.)

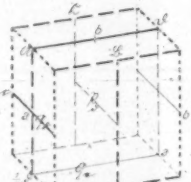


Fig. 26. (Nr. 9.)

Nr. 9α. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt einer Querdrehachse $\mathfrak{S}$ mit einer Vertikalachse. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{17}$).

b) auf einer Querdrehachse $\mathfrak{S}$ mitten zwischen den Schnittpunkten mit zwei benachbarten Vertikalachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{18}$.)

Nr. 10. **System des Oblongoktaeders.**

Rhombische Grundfläche: $|a| = |b|$, (Fig. 14.) Formel: $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{S}_c(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, $c$. $\mathfrak{S}_c$ liegt in der Diagonalebene $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{D}}$. Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen diametrale Atomsysteme vom Typ Fig. 19′, und zwar $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}'_1$ und $\mathfrak{A}', \mathfrak{A}_1$ je in gleicher, aber gegeneinander um $\frac{1}{2}c$ verschiedener Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,0)$. Eine zu $\mathfrak{S}_c$ parallele gleichartige Achse liegt im Abstand $\frac{1}{2}c$; zwei parallele Schraubenachsen $\mathfrak{P}_c(2,1)$ gehen in den Abständen $+\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

Parallel mit $b$ gehen Drehachsen $\mathfrak{S}_b(2,0)$ in den Höhen 0 und $\frac{1}{4}c$ durch die Achsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$, Schraubenachsen $\mathfrak{P}_b(2,1)$ in der Höhe $\frac{1}{4}c$ durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ (Fig. 27). (Sch. $\mathfrak{B}^5$.)

Nr. 10α. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt dreier Drehachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{25}$),

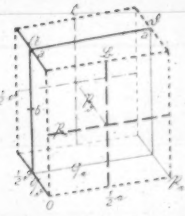


Fig. 27[1]). (Nr. 10.)

b) auf einer vertikalen Drehachse zwischen zwei Schnittpunkten mit Querachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{26}$.)

Quadratische Spezialisierung. $a \perp b$.

Nr 10′β. Spiegelebene

a) durch zwei benachbarte Achsen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{11}$.)

Nr. 11. **Rhombisches Gegenschraubensystem.**

Rhombische Grundfläche: $|a| = b$, (Fig. 14.) Formel: $\mathfrak{A}(2,0)$, $\mathfrak{S}_b(2,0)$, $a + \frac{1}{2}c$, $b + \frac{1}{2}c$, $c$. $\mathfrak{S}_b$ liegt in der Diagonalebene $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}$. Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen einfache diametrale Atompaare Fig. 5′, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'_1$, $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}'$ in untereinander gleichen, gegeneinander um $\frac{1}{2}c$ verschiedenen

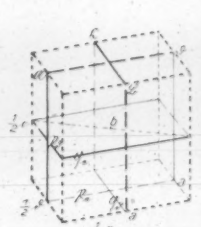


Fig. 28. (Nr. 11.)

Höhen (wie bei Nr. 4). Mit diesen Atomsystemen sind die nächst den verschiedenen Achsen $\mathfrak{D}$ liegenden Atompaare durch $\mathfrak{S}_b$ gemäß Fig. 20′ verknüpft. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,0)$. Zu $\mathfrak{S}_b$ parallele gleichartige Achsen im Abstand $\frac{1}{2}c$, außerdem parallele Schraubenachsen $\mathfrak{P}_b(2,1)$ im Abstand $\pm\frac{1}{4}c + \frac{1}{4}c$ durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$. Ferner Schraubenachsen $\mathfrak{P}_c(2,1)$ durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ in der Höhe der $\mathfrak{S}_b$, Drehachsen $\mathfrak{S}_c(2,0)$ im Abstand $\pm\frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c$ davon durch $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. (Fig. 28.) (Sch. $\mathfrak{B}^9$.)

1) In der Figur ist die durch $\vartheta$ gehende Kante versehentlich punktiert statt ausgezogen.

Nr. 11$\alpha$. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt einer Schrauben- und einer Drehachse. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{28}$),

b) im Mittelpunkt einer rechteckigen Zelle von den Kanten $\frac{1}{2}$ c, $\frac{1}{2}$ b, $\frac{1}{2}$ c, innerhalb deren sich keine Dreh- oder Schraubenachsen befinden. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{27}$.)

**Quadratische Spezialisierung.** $a \perp b$.

Nr. 11'$\gamma$. Gleitspiegelebene

a) mitten zwischen den parallelen Ebenen $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$; Gleitbetrag $\frac{1}{2}(a + c)$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{12}$.)

Nr. 12. **Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem erster Art.**

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$; (Fig. 13.) Formel: $\mathfrak{A}(2,1)$, $\mathfrak{S}_a'(2,0)$, a, b, c. Die Querachse liegt in einer Ebene mitten zwischen $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$. Benachbarte Achsenpaare $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{C}$ tragen Atompaare vom Typ Fig. 20'' in gleichen Höhen. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,1)$. Zu $\mathfrak{S}_a'$ liegen parallel gleichartige Achsen im Abstand $\frac{1}{2}$ c und $+\frac{1}{2}$ b. Zu ihnen normal verlaufen Schraubenachsen $\mathfrak{P}_b(2,1)$, welche die Vertikalachsen in der Höhe $\frac{1}{4}$ c schneiden. Fig. 29. (Sch. $\mathfrak{B}^3$.)

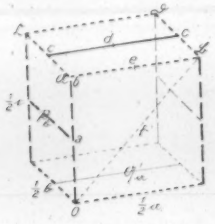


Fig. 29. (Nr. 12.)

Nr. 12$\alpha$. Spiegelpunkt

a) im Schnittpunkt zweier Schraubenachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{13}$),

b) auf einer Vertikalachse in der Höhe einer Querachse $\mathfrak{S}_a'(2,0)$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{11}$),

c) im Schnittpunkt einer Querachse $\mathfrak{S}_a'(2,0)$ mit der Ebene zweier Vertikalachsen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{9}$),

d) auf einer Querachse mitten zwischen den parallelen Ebenen $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ und $\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{D}}$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{12}$),

e) auf einer Geraden mitten zwischen zwei Vertikalachsen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in der Höhe einer Ebene mit Querachsen $\mathfrak{S}_a'(2,0)$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{14}$),

f) auf derselben Geraden in der Mitte zwischen zwei derartigen Ebenen. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{10}$.)

**Quadratische Spezialisierung.** $a = b$.

Nr. 12'$\beta$. Spiegelebene

a) unter 45° gegen die Vertikalachsen geneigt durch Querachsen $\mathfrak{S}_a'(2,0)$. (Sch. $\mathfrak{B}_d^3$.)

Nr. 12'$\gamma$. Gleitspiegelebene

a) ebenso gelegt; Gleitbetrag $\frac{1}{2}$ a. (Sch. $\mathfrak{B}_d^4$.)

Nr. 13. **Abwechselndes rechteckiges Zweipunktschraubensystem zweiter Art.**

Rechteckige Grundfläche: $a \perp b$. (Fig. 13). Formel: $\mathfrak{A}(2,1)$, $\mathfrak{S}_a'(2,1)$, a, b, c. Die Querachse liegt in einer Ebene mitten zwischen $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ und $\overline{\mathfrak{C}\mathfrak{D}}$. Benachbarte Achsenpaare $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ tragen Atompaare analog denen Fig. 21''. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(2,1)$, $\mathfrak{C}(2,1)$, $\mathfrak{D}(2,1)$. Zu $\mathfrak{S}_a'(2,1)$ liegen parallel gleichartige Schraubenachsen im Abstand $\frac{1}{2}$ c und $\frac{1}{2}$ b. Zu ihnen normal verlaufen Schraubenachsen $\mathfrak{S}_b'(2,1)$ mitten zwischen je zwei Vertikalachsen und zwei Querachsen $\mathfrak{S}_a'(2,1)$ hindurch (Fig. 30). (Sch. $\mathfrak{B}^4$.)

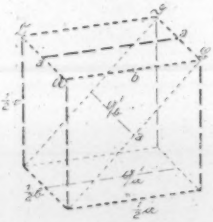


Fig. 30. (Nr. 13.)

Nr. 13$\alpha$. Spiegelpunkt

a) in der Ebene zweier benachbarter Vertikalachsen $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ oder $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{C}}$ im Schnittpunkt mit einer Querachse $\mathfrak{S}_a'$. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{16}$),

b) mitten zwischen zwei derartigen übereinander liegenden Schnittpunkten. (Sch. $\mathfrak{B}_h^{15}$.)

Von den überaus zahlreichen Typen dieser Abteilung II B besitzen die kristallographische Symmetrie $\{A_z^2, A_x^2\}$ die Nr. 5—13, die Symmetrie $\{C, A_z^2, A_x^2\}$ Nr. 5$\alpha$—13$\alpha$, die Symmetrie $\{A_x^2, E_{xy}\}$ oder $\{S_z, A_x^2\}$ die Nr. 5', 7', 8', 12'$\beta$ und $\gamma$, sowie Nr. 10'$\beta$ und 11'$\gamma$.

## III. Klasse. Dreizählige Hauptachsen.

Wenn unter parallelen Dreh- und Schraubenachsen die höchste Zähligkeit = 3 ist, so ordnen sich die dreizähligen Achsen in drei Scharen im

allgemeinen verschiedener, die mit $\mathfrak{A}(3,p)$, $\mathfrak{B}(3,q)$, $\mathfrak{C}(3,r)$ bezeichnet werden sollen. Ihre Schnittpunkte mit einer zu den (vertikal gestellten) Achsen normalen (horizontalen) Grundfläche bilden ein Netz mit Maschen von der Form gleichseitiger Dreiecke. Durch die drei Eckpunkte einer Masche gehen lauter verschiedene Achsen. Hieraus ergibt sich, daß die Maschen in der Richtung der Reihenfolge der drei Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ zur Hälfte negativ, zur Hälfte positiv

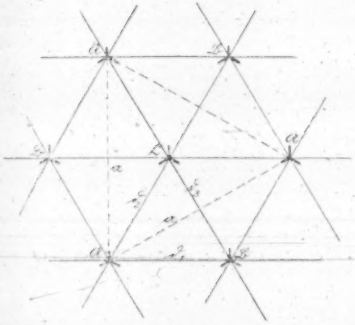


Fig. 31.

umlaufen werden. Die Seiten dieser Maschen mögen mit $\mathfrak{d}$ bezeichnet werden. Fig. 31, in der die Dreizähligkeit der Achsen durch einen dreispitzigen Stern angedeutet ist, veranschaulicht diese Verhältnisse.

Alle Achsen $\mathfrak{A}$, alle $\mathfrak{B}$, alle $\mathfrak{C}$ sind untereinander gleichartig, d. h. also entweder Drehachsen $\mathfrak{A}(3,0)$ oder Schraubenachsen, von denen es nach S. 243 nur die Arten $\mathfrak{A}(3,+1)$ gibt. Diese Gleichartigkeit folgt daraus, daß jene Achsen mit Hilfe der durch die $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ausgedrückten Deckbewegungen ausgetauscht werden können. Gleiches gilt nicht bezüglich der mit verschiedenen Buchstaben bezeichneten Achsen; es können vielmehr nebeneinander Drehachsen $\mathfrak{A}(3,0)$ und Schraubenachsen $\mathfrak{B}(3,+1)$ auftreten usw.

Die Schnittpunkte der Achsen $\mathfrak{A}$ mit der Grundfläche bilden für sich allein ein zweites Dreiecknetz, dessen Seiten mit $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden mögen. Die Mittelpunkte dieser Maschen werden abwechselnd von den Achsen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durchstoßen.

Außer den Grundstrecken $\mathfrak{d}$ bzw. $\mathfrak{a}$ dient zur Charakteristik der Atomanordnung wiederum die Periode $\mathfrak{c}$, d. h. die Strecke parallel den Vertikalachsen, nach der sich die gesamte Anordnung wiederholt. Ein gleichseitig dreieckiges Prisma von der Grundkante $\mathfrak{a}$ und der Höhe $\mathfrak{c}$ bildet in gewissem Sinne ein Elementargebiet der Anordnung.

Eine dreizählige Dreh- oder Schraubenachse liefert durch ihre Deckbewegung innerhalb der Periode $\mathfrak{c}$ zu einem Ausgangspunkt oder -atom $P$ nur zwei weitere $P'$ und $P''$, die in Meridianen liegen, die gegen den Meridian von $P$ um 120° und 240° gedreht sind. Im Falle der Drehachse $\mathfrak{A}(3,0)$ liegen alle drei Punkte in derselben Horizontalebene, im Falle der Schraubenachse $\mathfrak{A}(3,\pm 1)$ in drei je um $\frac{1}{3}\mathfrak{c}$ verschiedenen Höhen. Diese „Dreipunkter", die Fig. 32 nach den Grundsätzen von S. 246 darstellt, und die kurz als eben und $\pm$ gewunden unterschieden werden mögen, sind die Elemente, aus denen sich die den dreizähligen Achsen entsprechenden Anordnungen aufbauen. Ein System von Punkten oder Atomen, das in bezug auf eine Achsenart sich nach solchen Tripeln geordnet darstellt, muß sich auch in bezug auf jede der beiden andern Achsenarten entsprechend geordnet deuten lassen.

Da die Gleichartigkeit aller Achsen $\mathfrak{A}$ darauf beruht, daß dieselben durch Drehungen oder Schraubungen von der Zähligkeit Drei miteinander zur Deckung gebracht werden können, und diese Bewegungen sich über Winkel von 120° und 240° erstrecken, so liegen die Punkte $P$, $P'$, $P''$ in bezug auf alle Achsen einer Schar (z. B. $\mathfrak{A}$) in denselben drei um 120° gegeneinander geneigten Meridianen. Bezeichnet man nun die um verschiedene Achsen $\mathfrak{A}$ in parallelen Meridianen liegenden Punkte mit den gleichen Symbolen $P$ bzw. $P'$ und $P''$, so sieht man leicht, daß die gleichartigen Punkte im allgemeinen nicht in derselben Höhe liegen, sondern um $\frac{1}{3}\mathfrak{c}$ bzw. $\frac{2}{3}\mathfrak{c}$ verschiedenen, wobei ganze Vielfache der Periode $\mathfrak{c}$ als wirkungslos außer Betracht bleiben und aus dem gleichen

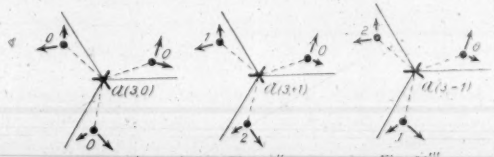



Fig. 32′. Fig. 32″. Fig. 32‴.

Grunde die Höhendifferenz $\frac{2}{3}c$ mit $-\frac{1}{3}c$ gleichwertig ist.

Hieraus folgt, daß zwei benachbarte gleichartige Achsen mit ihren (ihnen zugerechneten) Dreipunktern $P\,P'\,P''$ entweder durch eine Schiebung $a$ oder durch eine solche $a \pm \frac{1}{3}c$ zur Deckung gelangen.

Wie im vorigen Falle (zweizähliger Vertikalachsen) können auch hier zweizählige Quer-, Dreh- und Schraubenachsen zu den (dreizähligen) Vertikalachsen hinzutreten; sie müssen aber natürlich der allgemeinen Bedingung genügen, durch ihre Deckbewegungen alle Achsen mit gleichartigen auszutauschen. Es genügt, hier die Kombination einer Querdrehachse $\mathfrak{L}(2,0)$ mit einer Drehachse $\mathfrak{A}(3,0)$ und einer Schraubenachse $\mathfrak{A}(3,+1)$ für den Fall, daß $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{L}$ geschnitten wird, darzustellen, um eine Vorstellung von den entstehenden Kombinationen

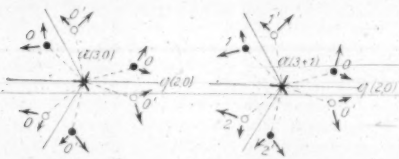


Fig. 33'. Fig. 33''.

zu geben (Fig. 33). Man kann diese beiden Typen als zusammengesetzte oder doppelte ebene und $\pm$ gewundene bezeichnen. Liegt $\mathfrak{L}$ in der Höhe $h$ über der o-Ebene, dann o', 1', 2' je um $2h$ über o, 1, 2.

Spiegelebenen $\mathfrak{E}$ und Gleitspiegelebenen $\mathfrak{G}$ in vertikaler Stellung sind in analoge Bedingungen gebunden wie Querachsen; die Kombination, die entsteht, wenn $\mathfrak{E}$ durch eine Achse $\mathfrak{A}(3,0)$ hindurchgeht, ist durch Fig. 34 veran-

Fig. 34.

schaulicht. Daß $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ zwei spiegelbildlich sich entsprechende Arten von Atomen voraussetzen, mag in Erinnerung gebracht werden.

## Abteilung A. Ohne Querachsen.

### Nr. 14/15. Rechtes und linkes Dreipunktschraubensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(3,\pm 1)$, $a$, $c$. Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen den in Fig. 32'' bzw. 32''' wiedergegebenen $+$ gewundenen Dreipunkter in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3,\pm 1)$, $\mathfrak{C}(3,\pm 1)$. (Sch. $\mathfrak{C}^1_3$ und $\mathfrak{C}^1_{3'}$.) Die beiden Formen Nr. 14 und 15 sind einander enantiomorph. Gemäß S. 245 kommt die Einführung von Deckoperationen zweiter Art bei ihnen nicht in Betracht.

### Nr. 16. Dreiseitiges Säulensystem.

Formel: $\mathfrak{A}(3,0)$, $a$, $c$. Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen ebene Dreipunkter vom Typ Fig. 32' in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3,0)$, $\mathfrak{C}(3,0)$. (Sch. $\mathfrak{C}^1_{3'}$.)

Nr. 16$\alpha$. Spiegelpunkt

a) auf irgendeiner der dreizähligen Achsen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in beliebiger Lage. (Sch. $\mathfrak{C}^1_{3,v}$).

Nr. 16$\beta$. Spiegelebene

a) durch zwei nächste, gleichartige Achsen, z. B. $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$; (Sch. $\mathfrak{C}^1_{3,v}$),

b) durch zwei nächste ungleichartige Achsen, z. B. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$; (Sch. $\mathfrak{C}^2_{3,v}$),

c) normal zu allen dreizähligen Achsen in beliebiger Lage. (Sch. $\mathfrak{C}^1_{3,h}$.)

Nr. 16$\gamma$. Gleitspiegelebene

a) durch zwei gleichartige Achsen, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$; (Sch. $\mathfrak{C}^3_{3,v}$),

b) durch zwei ungleichartige Achsen, Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$; (Sch. $\mathfrak{C}^4_{3,v}$.)

### Nr. 17. Rhomboedersystem.

Formel: $\mathfrak{A}(3,0)$, $a \pm \frac{1}{3}c$, $c$.

Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3,\pm 1)$, $\mathfrak{C}(3,\pm 1)$.

Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen ebene Dreipunkter, aber je drei in einem Grunddreieck mit den Seiten $a$ vereinigte Achsen in drei um $\frac{1}{3}c$ verschiedenen Höhen, so daß eine Art Schraubenfolge entsteht, die in den Dreiecken mit $\mathfrak{B}$ und mit $\mathfrak{C}$ im Zentrum einen entgegengesetzten Sinn hat. Demgemäß handelt es sich hier nicht um zwei enantiomorphe Anordnungen; die doppelten Vorzeichen entsprechen nur einer Umnennung der Achsen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. (Sch. $\mathfrak{C}^1_3$.)

Nr. 17$\alpha$. Spiegelpunkt

a) auf einer beliebigen Achse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in beliebiger Höhe. (Sch. $\mathfrak{C}^2_{3,i}$.)

Nr. 17$\beta$. Spiegelebene

a) durch benachbarte Achsen, z. B. $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$. (Sch. $\mathfrak{C}^5_{3,v}$.)

Nr. 17$\gamma$. Gleitspiegelebene

a) ebenso gelegen; Gleitbetrag $\frac{1}{2}c$. (Sch. $\mathfrak{C}^6_{3,v}$.)

Von den Typen der Abteilung III A haben die kristallographische Symmetrie $\{A^5_\infty\}$ Nr. 14/15,

16, 17; die Symmetrie $(C, A_2^3)$ Nr. 16$\alpha$, 17$\alpha$; die Symmetrie $(A_3^3, E_x)$ Nr. 16$\beta$a, b; Nr. 16$\gamma$a, b; Nr. 17$\beta$, Nr. 17$\gamma$; die Symmetrie $(A_3^3, E_z)$ Nr. 16$\beta$c.

### Abteilung B. **Mit Querachsen.**

Die Querachsen $\mathfrak{L}(2,0)$ liegen entweder so, daß beim Umklappen um sie alle Achsenarten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ mit gleichartigen zur Deckung kommen, oder so, daß nur eine (z. B. $\mathfrak{A}$) sich derartig verhält, die andern ($\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$) sich gegensätzig austauschen. Im ersten Falle liegt $\mathfrak{L}$ in der Ebene zweier benachbarten ungleichartigen Achsen, z. B. $\mathfrak{AB}$, und projiziert sich auf $\mathfrak{d}$, im zweiten Falle in der Ebene zweier benachbarten gleichartigen Achsen, z. B. $\mathfrak{AA}'$ und projiziert sich auf $\mathfrak{a}$. Unter diese beiden Kategorien fallen bzw. die vier ersten und die drei letzten Typen dieser Abteilung.

Nr. 18/19. **Rechtes und linkes zusammengesetztes Dreipunktschraubensystem.**

Formel: $\mathfrak{A}(3, \pm 1)$, $\mathfrak{L}_\mathfrak{d}(2,0)$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$. Alle Achsen $\mathfrak{A}$ tragen zusammengesetzte gewundene Dreipunkter Fig. 33″ bzw. 33‴ in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3, \pm 1)$, $\mathfrak{C}(3, +1)$; mit $\mathfrak{L}_\mathfrak{d}$ sind parallele und gleichartige Drehachsen im Abstand $\frac{1}{2}\mathfrak{a}$ und parallele Schraubenachsen $\mathfrak{P}_\mathfrak{d}(2,1)$ mit der Ganghöhe $2\mathfrak{d}$ im Abstand $\frac{1}{4}\mathfrak{a}$ verbunden. Dasselbe System kehrt in Ebenen mit der Höhendifferenz $\frac{1}{6}\mathfrak{c}$ je um $\pm 60°$ gedreht wieder, so daß in der dritten Ebene in der Höhe $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ die erste Konfiguration wieder stattfindet. Fig. 35 stellt die Achsen innerhalb eines Prismas von den Grundkanten $\mathfrak{d}$ und $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ dar; auch sind zu größerer Klarheit die durch nur einen Kantenpunkt gehenden Achsen durch kurze Strecken angedeutet. (Sch. $\mathfrak{D}_3^1$ und $\mathfrak{D}_3^2$.)

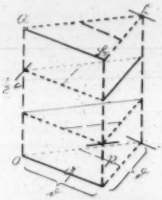


Fig. 35. (Nr. 18/19.)

Nr. 20: **Zusammengesetztes dreiseitiges Säulensystem.**

Formel: $\mathfrak{A}(3,0)$, $\mathfrak{L}_\mathfrak{b}(2,0)$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$. Alle Achsen tragen zusammengesetzte ebene Dreipunkter vom Typ Fig. 33′ in gleicher Höhe. Abhängige Achsen: $\mathfrak{B}(3,0)$, $\mathfrak{C}(3;0)$; mit $\mathfrak{L}_\mathfrak{b}$ gleichartige Querdrehachsen liegen in allen drei Seiten $\mathfrak{AB}$, $\mathfrak{BC}$, $\mathfrak{CA}$ des Grunddreiecks und um $\frac{1}{2}\mathfrak{c}$ darüber; Querschraubenachsen verbinden die Seitenmitten (Fig. 36). (Sch. $\mathfrak{D}_3^1$.)

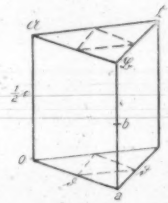


Fig. 36. (Nr. 20.)

Nr. 20$\alpha$. Spiegelpunkt

a) auf einer Achse $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ oder $\mathfrak{C}$ im Schnittpunkt mit Querachsen; (Sch. $\mathfrak{D}_{3,d}^1$),

b) ebenda zwischen zwei Schnittpunkten mit Querachsen. (Sch. $\mathfrak{D}_{3,d}^2$.)

Nr. 20$\beta$. Spiegelebene

a) normal zu $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ in einer Ebene mit Querachsen; (Sch. $\mathfrak{D}_{3,h}^1$),

b) ebenso mitten zwischen zwei benachbarten Ebenen mit Querachsen. (Sch. $\mathfrak{D}_{3,h}^2$.)

(Fortsetzung folgt.)

(Berichtigung: Seite 246 I, Zeile 10 v. u. setze $4 \times 48$ statt 48.)

# BESPRECHUNGEN.

**H. Usner, Der Kreisel als Richtungsweiser, seine Entwickelung, Theorie und Eigenschaften.** Lex.-8. 156 S. u. 7 Tafeln. München, Militärische Verlagsanstalt. 1917. M. 8.—

Der Verf. behandelt das durch den U-Bootskrieg so aktuell gewordene Problem des Kreiselkompasses mit Gründlichkeit und Sachkenntnis. Als physikalischer Sachverständiger der Firma Neufeldt und Kuhnke, die sich seit langem mit dem Problem der magnetischen Kompaß-Steuerung beschäftigt, verfügt er über Einzelkenntnisse der in den verschiedenen Patentschriften niedergelegten Konstruktionen. Auch beherrscht er die historische Entwicklung des Problems seit Foucault und die allgemeinen mechanischen Gesichtspunkte.

Die Darstellung, die sich u. a. an Techniker und Marineoffiziere wendet, ist analytisch geschickt; vielleicht würde sie gerade für den genannten Leserkreis leichter faßlich sein, wenn sie nicht durchweg den Weg vom allgemeinen analytischen Ansatz zum speziellen Problem bevorzugen und der geometrisch-mechanischen Anschauung etwas mehr Raum geben würde. Aber auch der vom Verf. gewählte, in den älteren Darstellungen der analytischen Mechanik meistenteils eingeschlagene Weg hat seine besonderen und anerkannten Vorzüge. Die mechanischen Grundlagen der Theorie werden zweckmäßigerweise im Text ohne Beweis postuliert (z. B. „der Drall des kräftefreien Kreisels bleibt nach Richtung und Größe konstant" usw.) und in mathematisch etwas weiter ausgeführten Anmerkungen am Schlusse des Buches erläutert. Ob man übrigens (vgl. Anm. 8) die Lagrangesche Methode passend als „energetische" Ableitung der Bewegungsgleichungen bezeichnen soll, kann bezweifelt werden.

Der in Patentfragen nicht ganz unbefangene Leser wird indessen den Eindruck nicht loswerden, daß Verf. die allgemeine Tendenz verfolgt, die Verdienste von Anschütz-Kaempfe — nach allgemeinem Urteil des bahnbrechenden Verwirklichers der vor ihm nebelhaften Kreiselkompaß-Idee — herabzumindern, teils indem mit Vorliebe auf eine ältere, nur modellmäßig ausgeführte Konstruktion von Vanden Boos exemplifiziert wird, teils indem gewisse auf Anschütz fußende Konstruktionen des Amerikaners A. E. Sperry auffallend hervorgehoben werden. Tatsächlich haben Vergleichsversuche, die im Jahre 1914 in Kiel mit Sperry- und Anschütz-Apparaten von der deutschen Marine veranstaltet wurden, zu dem „Gesamtergebnis" geführt: „Der Sperry-Kompaß hat sich in der vorliegenden Konstruktion dem Anschütz-Kompaß gegenüber weit unterlegen gezeigt. Er ist besonders wegen seiner Unzuverlässigkeit bei schlingerndem Schiff für den Gebrauch innerhalb der Kaiserlichen Marine nicht geeignet." Nach einem für die Marine-Rundschau bestimmten Protokoll, dessen Veröffentlichung nur durch den Kriegsausbruch verhindert wurde, waren die Abweichungen des Sperry-Apparates von der richtigen Weisung durchschnittlich etwa dreimal so groß wie die des Anschütz-Apparates. Vielleicht interessiert es den physikalischen Leser, daß als gerichtlicher Sachverständiger bei diesen Feststellungen Einstein mitwirkte.

Im Anfange von Kapitel V macht Verf. einige vielleicht weniger bekannte Mitteilungen über die Entstehungsgeschichte der Anschützschen Konstruktion. Sie war gedacht als Hilfsmittel der Polarforschung. Der Nordpol sollte durch ein Unterseeboot erreicht werden, zu dessen Steuerung der Kreiselkompaß unentbehrlich ist. Seit 1900 hat Anschütz seinen Gedanken trotz anfänglicher Fehlschläge festgehalten und immer von neuem verbessert. Aus eigenen Mitteln hat er orientierende Expeditionen nach Grönland ausgerüstet. Die marinetechnische Anwendung, die, wie bekannt, für den Krieg von ungeheurer Tragweite geworden ist, lag ursprünglich außerhalb seines Gesichtskreises.

A. Sommerfeld.

## Personalien.

**(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)**

**Ernannt:** Dr. Eyvind Bödtker aus Trondhjem zum Professor der Chemie an der Universität Kristiania, Chefingenieur Dr. Theodor Niethammer zum a. o. Professor für Astronomie und Meteorologie an der Universität Basel, der a. o. Professor an der Universität Marburg Dr. Karl Fries zum ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig, der ord. Professor für organische Chemie an der Technischen Hochschule München Dr. Heinrich Wieland zum ord. Professor der allgemeinen und Experimentalchemie an der Universität Straßburg (zum Sommer 1919).

**Verliehen:** Dem emeritierten ord. Professor der Physik an der Universität Wien Hofrat Dr. Viktor v. Lang die Würde eines Wirklichen Geheimen Rates (mit dem Titel Exzellenz), den Privatdozenten an der Universität Göttingen Dr. Erwin Madelung (Physik) und Dr. Horst v. Sanden (angewandte Mathematik), den Kantonsschulprofessoren und Dozenten für Mathematik an der Technischen Hochschule Zürich Dr. Ernst Amberg und Dr. Konrad Brandenberger, dem Leiter der mikroskopischen Abteilung der Zeißwerke in Jena Dr. Harry Siedentopf sowie dem Privatdozenten in der Abteilung Chemie (speziell Verbrennung und Heizung) an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Ernst Börnstein der Titel Professor.

**Gestorben:** Der a. o. Professor für organische Chemie an der Universität Kiel Dr. Ludwig Berend, der emer. ord. Professor der techn. Chemie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Karl Häußermann, der Astronom, Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Paris, Charles J. E. Wolff.

**In den Ruhestand:** Der ord. Honorarprofessor für höhere Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Friedrich Graefe und der Privatdozent für geometrische Optik an derselben Hochschule Professor Dr. Ferdinand Meisel.


## Angebote.

**Physiker und Elektroingenieure**

mit abgeschlossener Hochschulbildung zur experimentellen Durchbildung von Apparaten für drahtlose Telegraphie, insbesondere Verstärkern und Röhrensendern gesucht. Bewerbungen mit Angabe des Bildungsganges und der Gehaltsansprüche erbeten an

**Dr. Georg Seibt,**
**Fabrik elektrischer Apparate,**
**Berlin-Schöneberg,** Hauptstr. 11.


Für die Schriftleitung verantwortlich Geh. Regierungsrat Prof. Dr. H. Th. Simon in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

# Polyphos

**München, Schillerstr. 16**

**Spezialfabrik f. Röntgenapparate und Röntgenröhren**

Die

**Ventil-Vakuumröhre „Constanz“,**

(2 D.R.P., 2 D.R.G.M.)

die ausschließlich von der **Polyphos-Ges.** hergestellt wird, hat sich zur **Unterdrückung der ungewünschten Stromphase** in **vieljähr.** Verwendung **glänzend bewährt.**

Sie zeigt im Gegensatz zu anderen Ventilröhren bei richtiger Härte **keine Fluoreszenz** des Glases.

**Dr. Loose**, Bremen, schreibt u. a.: **„Ich begrüße diese Röhre als einen wesentlichen Fortschritt“.**

# Induktorium

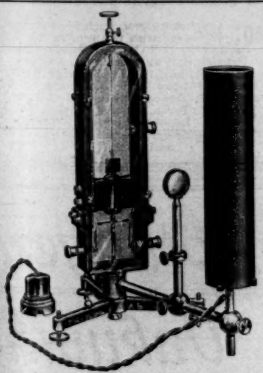
**Patent Klingelfuß**

**mit eingebauter Meßspule und eingeschaltetem Sklerometer und Milliampèremeter. Beide Instrumente sind spannungslos gegen Erde und können in beliebiger Entfernung vom Induktorium und der Röntgenröhre aufgestellt werden.**

**Fr. Klingelfuß & Co., Basel.**

# Max Kohl A.G. Chemnitz

Volleingezahltes Kapital Mk. 1600000.



61392. Drehspul-Spiegelgalvanometer.

## Physikalische Apparate

**Funken-Induktoren**

**Ölluftpumpen**

**Experimentier-Schalttafeln**

**Projektions-Apparate**

**Laboratorienmöbel**

in gediegener Ausführung.

Weltausstellung Brüssel 1910: 4 Grosse Preise; Turin 1911: 2 Grosse Preise; Dresden 1911: Grosser Preis.

## Inhaltsverzeichnis:

(Z. B. = Zusammenfassende Bearbeitungen; B. = Besprechungen.)


| | Seite |
|---|---|
| **Cederberg, J. W.**, Die thermodynamische Berechnung chemischer Affinitäten von homogenen und heterogenen Gasreaktionen. (B.) | 368 |
| Chemie: Lehrbuch der physikalischen —, v. K. Jellinek. II. (B.) | 367 |
| Chemische Affinitäten: Die thermodynamische Berechnung — von homogenen und heterogenen Gasreaktionen, v. J. W. Cederberg. (B.) | 368 |
| Erdmagnetische Schwankung: Besitzt die tägliche — in der Erdoberfläche ein Potential? v. A. Schmidt | 349 |
| Gasreaktionen: Die thermodynamische Berechnung chemischer Affinitäten von homogenen und heterogenen —, v. J. W. Cederberg. (B.) | 368 |
| **Jellinek, K.**, Lehrbuch der physikalischen Chemie. II. (B.) | 367 |
| **Kohlrausch, K. W. F.**, Über die Wellenlänge der harten $\gamma$-Strahlung von Radium | 345 |
| **Meißner, O.**, Vergleichung der mikroseismischen Bewegung in de Bilt, Potsdam und Pulkowa | 355 |
| Mikroseismische Bewegung: Vergleich der — in de Bilt, Potsdam und Pulkowa, v. O. Meißner | 355 |
| Musikwissenschaft: Die Grundlage der — und das duale Reininstrument, v. A. v. Oettingen. (B.) | 366 |
| **Oettingen, A. v.**, Die Grundlage der Musikwissenschaft und das duale Reininstrument. (B.) | 366 |
| Physikalische Chemie: Lehrbuch der —, v. K. Jellinek. II. (B.) | 367 |
| Potential: Besitzt die tägliche erdmagnetische Schwankung in der Erdoberfläche ein —, v. A. Schmidt | 349 |
| Radium: Über die Wellenlänge der harten $\gamma$-Strahlung von —, v. K. W. F. Kohlrausch | 345 |
| **Schmidt, A.**, Besitzt die tägliche erdmagnetische Schwankung in der Erdoberfläche ein Potential? | 349 |
| $\gamma$-Strahlung: Über die Wellenlänge der harten — von Radium, v. K. W. F. Kohlrausch | 345 |
| **Voigt, W.**, Die Resultate der geometrischen Strukturtheorien und die Ergebnisse der Analyse durch Röntgenstrahlen. Spezieller Teil I. (Schluß.) (Z. B.) | 357 |



**Physiker** mit guten Kenntnissen der Wärmetechnik und Elektrotechnik für Forschungslaboratorium einer großen chemischen Fabrik gesucht.

Bewerbungen mit Angaben über Bildungsgang, bisherige Tätigkeit, Militärverhältnisse und Gehaltsansprüche erbeten unter E. F. 522 an die „Ala" Essen, Handelshof.

Neuste Konstruktion!

Kugelepiskop. D.R.P. 250314.

**Franz Schmidt & Haensch**

**Berlin S. 42,** Prinzessinnenstraße 16

**Werkstätten für Präzisions-Mechanik und Optik.**

**Neue optische Spezialinstrumente eigener Konstruktion, Polarisations-, Spektral-, Projektionsapparate, Episkope u. a.**

Preislisten kostenlos.